Ion CRĂCIUN

CAPITOLE
DE
MATEMATICI SPECIALE

EDITURA PIM
IAŞI 2007

Cuprins

Capitolul 1

Ecuaţii diferenţiale liniare de ordin superior

1.1 Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi variabili

Fie $C^n([a,b])$ spaţiul vectorial al funcţiilor reale continue, cu derivate continue până la ordinul n inclusiv pe intervalul real $[a,b]$ şi funcţiile

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, f \in C^0([a,b]).$$

Funcţia a_0 este considerată astfel încât să nu se anuleze pe intervalul $[a,b]$.

Definiţia 1.1.1 *O ecuaţie de forma*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{1.1}$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n neomogenă** *dacă se cere să se determine toate funcţiile $y = \varphi(x)$, unde $\varphi \in C^n([a,b])$, astfel încât să avem*

$$a_0(x)\varphi^{(n)}(x)+a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+\cdots+a_{n-1}(x)\varphi'(x)+a_n(x)\varphi(x) \equiv f(x) \tag{1.2}$$

Definiţia 1.1.2 *Funcţia y din ecuaţia diferenţială* (1.1) *se numeşte* **necunoscuta***, $\varphi \in C^n([a,b])$ care satisface identitatea* (1.2) *este o* **soluţie***, a_0, a_1, $\ldots$, a_n se numesc* **coeficienţi***, iar f este* **termenul liber** *al ecuaţiei.*

Definiţia 1.1.3 *O ecuaţie de forma*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (1.3)$$

se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul** n.

Definiţia 1.1.4 *Când coeficienţii ecuaţiei diferenţiale* (1.3) *sunt aceeaşi cu cei ai ecuaţiei* (1.1), *ecuaţia* (1.3) *se numeşte* **ecuaţia diferenţială omogenă asociată** *ecuaţiei neomogene* (1.1).

Pe spaţiul vectorial $C^n([a,b])$ definim aplicaţia L prin

$$L(y) = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^{n-k}\Big)y, \qquad (1.4)$$

unde $D = \dfrac{d}{dx}$ este operatorul de derivare de ordinul întâi iar D^{n-k} este operatorul obţinut prin aplicarea repetată de $n-k$ ori a operatorului D, adică $D^{n-k} = \dfrac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$. Evident, $D^{n-k}y$ este derivata de ordinul $n-k$ a funcţiei $y \in C^n([a,b])$.

Teorema 1.1.1 *Aplicaţia* $L : C^n([a,b]) \to C^0([a,b])$ *este operator liniar.*

Demonstraţie. Operatorul de derivare D este liniar deoarece derivata unei combinaţii liniare de funcţii derivabile este egală cu combinaţia liniară a derivatelor funcţiilor, adică are loc egalitatea

$$D(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 D y_1 + \alpha_2 D y_2, \qquad (1.5)$$

oricare ar fi constantele α_1, α_2 şi oricare ar fi funcţiile derivabile y_1, y_2.

În baza relaţiilor (1.4) şi (1.5), egalitatea

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2), \qquad (1.6)$$

este satisfăcută oricare ar fi constantele α_1, α_2 şi oricare ar fi funcţiile reale y_1, y_2 aparţinând spaţiului vectorial $C^n([a,b])$. Rezultatul aplicării operatorului L unei funcţii $y \in C^n([a,b])$ este o funcţie continuă.

Din (1.6) rezultă că $L : C^n([a,b]) \to C^0([a,b])$ este operator liniar. ■

Definiţia 1.1.5 *Fie x_0 un punct arbitrar din intervalul $[a, b]$. Problema determinării acelei soluţii $y \in C^n([a, b])$ a ecuaţiei diferenţiale* (1.1) *care să satisfacă* **condiţiile iniţiale**

$$\begin{cases} y(x_0) & = & (D^0 y)(x_0) & = & y_{01}, \\ y'(x_0) & = & (D^1 y)(x_0) & = & y_{02}, \\ \cdots, & & & & \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & (D^{n-1} y)(x_0) & = & y_{0n}, \end{cases} \tag{1.7}$$

unde y_{01}, y_{02}, $\cdots$, y_{0n} sunt numere reale arbitrare date, se numeşte **problema lui Cauchy** *a ecuaţiei diferenţiale* (1.1).

O definiţie asemănătoare se poate formula şi pentru ecuaţia diferenţială liniară, de ordinul n, omogenă.

Teorema 1.1.2 (**Existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy**) *Dacă funcţiile reale a_0, a_1, $\cdots$, a_n şi f din ecuaţia diferenţială* (1.1) *sunt funcţii continue pe $[a, b]$, atunci soluţia problema lui Cauchy a acestei ecuaţii diferenţiale, cu condiţiile iniţiale* (1.7), *există şi este unică, oricare ar fi condiţiile iniţiale* (1.7).

Observaţia 1.1.1 *Rezultat similar are loc şi pentru soluţia problemei lui Cauchy a unei ecuaţii diferenţiale liniară, cu coeficienţi variabili, de ordinul n, omogenă de forma* (1.3).

1.2 Ecuaţii diferenţiale liniare omogene de ordinul n cu coeficienţi variabili

Să considerăm ecuaţia

$$L(y) \;=\; a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{1.8}$$

numită, după cum s–a specificat, ecuaţie diferenţială liniară de ordinul n, omogenă şi cu coeficienţi variabili.

Considerăm $y \in C^n([a, b])$, a_0, a_1, $\cdots$, $a_n \in C^0([a, b])$ şi $a_0(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [a, b]$.

Teorema 1.2.1 *Mulţimea soluţiilor ecuaţiei diferenţiale liniară, omogenă, de ordinul n, cu coeficienţi variabili, este spaţiu liniar real.*

Demonstraţie. Fie y_1, y_2 soluţii arbitrare ale ecuaţiei (1.8). Aceasta înseamnă că

$$L(y_1) = 0, \quad L(y_2) = 0. \tag{1.9}$$

Teorema este demonstrată dacă

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = 0, \quad (\forall)\ \alpha_1, \alpha_2 \in I\!R. \tag{1.10}$$

Dar $L : C^n([a,b]) \to C^0([a,b])$ este operator liniar, prin urmare avem

$$L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2). \tag{1.11}$$

Din (1.9) şi (1.11) rezultă (1.10), ceea ce arată că mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1.8) este subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $C^n([a,b])$.

Dar, un subspaţiu liniar al unui spaţiu liniar este el însuşi spaţiu liniar şi teorema este demonstrată. ■

De altfel, concluzia Teoremei 1.2.1 rezultă şi din observaţia care urmează.

Observaţia 1.2.1 *Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale liniară omogenă de ordinul n cu coeficienţi variabili este nucleul $Ker(L)$ al operatorului liniar L*

$$Ker(L) = \{y \in C^n([a,b]) \,|\, L(y) = 0\}.$$

Dar, nucleul unui operator liniar definit pe un spaţiu liniar este un subspaţiu liniar al acelui spaţiu. Prin urmare, $Ker(L)$ este subspaţiu liniar al spaţiului vectorial $C^n([a,b])$.

Observaţia 1.2.2 *Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sunt p soluţii arbitrare ale ecuaţiei* (1.8) *şi C_1, C_2, $\cdots$, C_p sunt constante oarecare, atunci funcţia*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_p y_p$$

este de asemeni soluţie a aceleiaşi ecuaţii.

Definiţia 1.2.1 *Se numeşte* **soluţie generală** *a ecuaţiei diferenţiale* (1.8) *un element $y \in Ker(L)$ depinzând de n constante arbitrare, de forma*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

cu proprietatea că, dând valori constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se poate obţine orice soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale (1.8) *care satisface condiţiile iniţiale* (1.7), *unde $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n})$ este un vector arbitrar din $I\!R^n$.*

Fie $\mathcal{B}$ un sistem de n soluţii arbitrare ale ecuaţiei diferenţiale (1.8),

$$\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}, \quad y_j \in \mathrm{Ker}(L), \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.12}$$

Definiţia 1.2.2 *Se numeşte* **wronskianul** *sistemului $\mathcal{B}$ de soluţii ale ecuaţiei diferenţiale* (1.8), *funcţia*

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] : [a, b] \to I\!R$$

ale cărei valori, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)$ sau $W(x)$, sunt date de valorile determinantului

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in [a, b].$$

Pentru wronskianul sistemului $\mathcal{B}$ de soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1.8) se utilizează şi denumirea *determinantul lui Wronski*, după numele matematicianului polonez Josef Hoené Wronski (1778–1853).

Definiţia 1.2.3 *Sistemul de soluţii $\mathcal{B}$ din* (1.12) *se spune că formează un* **sistem fundamental de soluţii** *al ecuaţiei diferenţiale* (1.8) *dacă*

$$W(x) \neq 0, \quad (\forall)\ x \in (a, b).$$

Teorema 1.2.2 (**Liouville**) *Wronskianul oricăror n soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniară, de ordinul n, omogenă este, sau identic nul pe intervalul (a, b), sau diferit de zero în orice punct din (a, b).*

Demonstraţie. Utilizând regula de derivare a unui determinant şi proprietăţile determinanţilor deducem că $W(x)$ satisface ecuaţia diferenţială ordinară, de ordinul întâi, cu variabile separate

$$W'(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)} W(x), \quad x \in (a, b). \tag{1.13}$$

Dacă în locul variabilei x din egalitatea (1.13) punem t şi scriem egalitatea corespunzătoare pe intervalul $[x_0, x] \subset [a, b]$, avem

$$W'(t) = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} W(t), \quad t \in [x_0, x]. \tag{1.14}$$

Integrând relaţia (1.14) pe intervalul indicat alăturat, obţinem

$$\ln W(x) - \ln W(x_0) = -\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt,$$

de unde

$$W(x) = W(x_0)\exp\Big(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\Big), \quad x \in (a,b). \tag{1.15}$$

Relaţia (1.15) arată că W este, sau funcţia identic nulă, sau nu are nici un zerou, după cum $W(x_0)$ este zero, respectiv, diferit de zero. ■

Teorema 1.2.3 (**Existenţa unui sistem fundamental de soluţii**) *Pentru orice ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă, de forma* (1.8), *există un sistem fundamental de soluţii.*

Demonstraţie. Considerăm n^2 numere reale α_{ij} cu proprietatea că matricea pătratică A de ordinul n, având elementele α_{ij}, este nesingulară. Fie y_1, y_2, $\cdots$, y_n soluţiile a n probleme ale lui Cauchy pentru ecuaţia (1.8) care satisfac respectiv condiţiile iniţiale

$$y_i(x_0) = \alpha_{i1}, \quad y_i'(x_0) = \alpha_{i2}, \quad \cdots, \quad y_i^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{in}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Existenţa şi unicitatea acestor n soluţii este asigurată de Teorema 1.1.2.

Valoarea în x_0 a wronskianului acestor n soluţii este

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = W(x_0) = \det A. \tag{1.16}$$

Deoarece A este matrice nesingulară, determinantul ei este diferit de zero. Atunci, din (1.15) şi (1.16) rezultă că valorile wronskianului celor n soluţii ale ecuaţiei (1.8) sunt nenule pe intervalul (a, b).

Rezultatul stabilit şi Definiţia 1.2.2 demonstrează teorema. ■

Observaţia 1.2.3 *Pentru o ecuaţie diferenţială liniară de forma* (1.8) *se pot determina o infinitate de sisteme fundamentale de soluţii.*

Definiţia 1.2.4 *Sistemul fundamental de soluţii* $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *ale căror derivate au proprietatea că într–un punct* $x_0 \in (a, b)$

$$y_i^{(j-1)}(x_0) = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n},$$

unde δ_{ij} *sunt simbolii lui Kronecker, se numeşte* **sistem fundamental normal**.

Observaţia 1.2.4 *Pentru un sistem fundamental normal, matricea A din demonstraţia teoremei precedente este matricea unitate de ordinul n.*

S–a arătat că $\text{Ker}\,(L)$ este un spaţiu vectorial (vezi Teorema 1.2.1). Reamintim următoarele definiţii valabile pentru un spaţiu vectorial real S, oarecare.

Definiţia 1.2.5 *Elementele $y_1, y_2, \ldots, y_p \in S$ sunt* **liniar dependente** *dacă există p numere reale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, nu toate nule, astfel încât să avem*

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p = 0. \tag{1.17}$$

Dacă elementele $y_1, y_2, \ldots, y_p \in S$ sunt liniar dependente, se mai spune că sistemul de vectori $S_p = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ este liniar dependent.

Definiţia 1.2.6 *Elementele $y_1, y_2, \ldots, y_p \in S$ sunt* **liniar independente***, dacă ele nu sunt liniar dependente.*

Observaţia 1.2.5 *Sistemul de vectori $S_p = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\} \subset S$ este liniar independent dacă identitatea* (1.17) *are loc atunci şi numai atunci când toate constantele $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_p$ sunt nule.*

Elementele din definiţiile precedente pot fi funcţii reale definite pe un interval real.

Se poate demonstra fără dificultate că un sistem de p vectori din S este liniar dependent dacă şi numai dacă cel puţin unul din vectori se scrie ca o combinaţie liniară de ceilalţi vectori ai sistemului.

Definiţia 1.2.7 *Dacă în spaţiul liniar S avem un sistem de p elemente liniar independente $S_p = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ şi dacă orice $y \in S$ se exprimă în mod unic prin*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_p y_p, \tag{1.18}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_p$ sunt numere reale, atunci spunem că spaţiul vectorial S are **dimensiunea** *p, sau că este $p-$***dimensional** *şi că sistemul S_p de vectori formează o* **bază** *în S. Numerele reale $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_p$ se numesc* **coordonatele** *vectorului y în baza S_p.*

Observaţia 1.2.6 *Relaţia* (1.18) *se poate scrie în forma matriceală*

$$y = \Gamma \cdot C, \tag{1.19}$$

unde Γ este o matrice de tipul $1 \times p$, de elemente $y_1, y_2, \ldots, y_p$, iar C este matrice de tipul $p \times 1$ având elementele $C_1, C_2, \ldots, C_p$. Putem spune că C este matricea coloană a coordonatelor vectorului y în baza S_p.

Teorema 1.2.4 *Baza într–un spaţiu liniar $p-$dimensional S, dacă există, nu este unică.*

Demonstraţie. Să considerăm un alt sistem de vectori din spaţiul liniar S, de elemente $z_1,\, z_2,\, \cdots,\, z_p$. Conform Observaţiei 1.2.6 rezultă că elementele acestui sistem se pot scrie în formele

$$z_i = \Gamma \cdot C_i, \quad i = \overline{1,p},$$

unde C_i este matricea coloană a coordonatelor vectorului z_i în baza S_p. Dacă elementele matricei C_i sunt $c_{i1},\, c_{i2},\, \cdots,\, c_{ip}$, atunci matricea linie z, cu elementele $z_1,\, z_2,\, \cdots,\, z_p$, se exprimă prin

$$z = \Gamma \cdot C, \tag{1.20}$$

unde $C = (c_{ij})_{p\times p}$ este matricea pătratică cu coloanele C_i, $i = \overline{1,p}$.

Matricea C din (1.20) se numeşte *matricea de trecere* de la baza S_p la sistemul de vectori $\widetilde{S_p} = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$.

Pentru ca sistemul de vectori $\widetilde{S_p}$ să fie bază în S este necesar ca el să fie liniar independent.

Dependenţa sau independenţa unui sistem de vectori rezultă studiind combinaţia liniară

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \cdots + \lambda_p z_p = 0,$$

care, conform (1.19), se scrie

$$z \cdot \Lambda = 0, \tag{1.21}$$

unde Λ este o matrice coloană de elemente $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, iar z este matricea linie de elemente $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Din relaţiile (1.20), (1.21) şi din faptul că S_p este un sistem liniar independent rezultă

$$C \cdot \Lambda = O, \tag{1.22}$$

unde O este matricea pătratică nulă de ordinul n. Egalând elementele corespunzătoare din cei doi membri ai relaţiei (1.22) suntem conduşi la un sistem liniar şi omogen de p ecuaţii cu p necunoscute $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Acest sistem are numai soluţia banală dacă şi numai dacă matricea sa C este nesingulară.

Astfel, am demonstrat că dacă matricea de trecere C de la baza S_p la sistemul de vectori $\widetilde{S_p}$ este nesingulară, atunci $\widetilde{S_p}$ este bază în S.

Cum numărul matricelor pătratice nesingulare de ordinul p este infinit, rezultă că dacă într–un spaţiu vectorial $p-$dimensional există o bază, atunci el are o infinitate de baze.

Orice alt sistem format din p vectori ai spaţiului formează bază dacă şi numai dacă matricea de trecere de la o bază la acel sistem de vectori este nesingulară. ■

Exemplul 1.2.1 *Funcţiile* $1, x, e^x$ *sunt liniar independente pe* $\mathbb{R}$ *deoarece condiţia*

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot e^x = 0, \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}$$

implică $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Teorema 1.2.5 *Condiţia necesară şi suficientă ca n soluţii* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *ale ecuaţiei diferenţiale* $L(y) = 0$ *să fie liniar independente este ca wronskianul* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ *să nu fie identic nul pe* $[a, b]$.

Demonstraţie. Să arătăm că această condiţie este *suficientă*, adică dacă funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \text{Ker}\,(L)$ sunt astfel încât $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$, atunci sistemul $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ este liniar independent.

Să admitem contrariul, ceea ce înseamnă că $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar dependente pe $[a, b]$. Atunci, există constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$, nu toate nule, astfel încât

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n = 0. \tag{1.23}$$

În orice $x \in [a, b]$ egalitatea (1.23) şi cele obţinute derivând de $(n-1)$ ori sunt adevărate, astfel că putem scrie sistemul

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0, \\ C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) + \cdots + C_n y_n'(x) = 0, \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + C_2 y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

şi, în particular

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) = 0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Însă, determinantul sistemului (1.25) în necunoscutele C_1, C_2, $\cdots$, C_n este $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$. Deci, sistemul nu are decât soluţia banală

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0.$$

Acest rezultat vine să contrazică presupunerea că soluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar dependente, prin urmare ele sunt liniar independente.

Să arătăm acum necesitatea condiţiei din enunţul teoremei, adică dacă soluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar independente în $\text{Ker}\,(L)$ atunci, în $x_0 \in [a,b]$, avem $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$.

Deoarece funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt liniar independente, (1.23) are loc dacă şi numai dacă toate constantele sunt nule. În particular, sistemul (1.25) are numai soluţia banală, situaţie care se întâmplă dacă şi numai dacă determinantul sistemului, adică $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0)$, este diferit de zero. Din Teorema 1.2.2 rezultă că wronskianul celor n soluţii este diferit de zero în orice punct din $[a,b]$. ■

Teorema 1.2.6 *Ker(L) este un spaţiu vectorial $n-$dimensional.*

Demonstraţie. Să considerăm soluţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuaţiei $L(y) = 0$ care satisfac următoarele condiţii iniţiale

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1, & y_2(x_0) = 0, & \cdots, & y_n(x_0) = 0, \\ y_1'(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \cdots, & y_n(x_0) = 0, \\ \cdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0, & \cdots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{cases} \tag{1.26}$$

şi să demonstrăm că ele sunt liniar independente.

Dacă aceste soluţii ar fi liniar dependente, atunci ar exista constantele C_1, C_2, $\ldots$, C_n, nu toate nule, astfel încât să avem relaţia (1.23).

Însă, deoarece $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \text{Ker}\,(L)$, din ecuaţia (1.23) deducem că într–un punct oarecare $x \in [a,b]$ avem sistemul (1.24).

În particular, sistemul (1.24) este adevărat pentru $x = x_0$ şi, datorită condiţiilor iniţiale (1.26), acesta devine de forma (1.25)

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \cdots + C_n \cdot 0 &=& 0, \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \cdots + C_n \cdot 0 &=& 0, \\ \cdots, & & \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + \cdots + C_n \cdot 1 &=& 0. \end{cases}$$

Acest sistem are doar soluţia banală $C_1 = 0, C_2 = 0, \ldots, C_n = 0$, rezultat care contrazice ipoteza. Prin urmare, sistemul de soluţii $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ este liniar independent.

Pentru ca acest sistem de soluţii să fie o bază în Ker (L) trebuie să arătăm că orice element $y \in \text{Ker}\,(L)$ este de forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n. \tag{1.27}$$

Putem afirma că Ker (L) cuprinde totalitatea soluţiilor problemelor lui Cauchy pentru ecuaţia $L(y) = 0$.

Existenţa şi unicitatea soluţiei y a unei probleme Cauchy pentru ecuaţia diferenţială $L(y) = 0$ este asigurată de Teorema 1.1.1. Rămâne să arătăm că C_i, $i = \overline{1, n}$, din (1.27) există şi sunt unice. Dar aceasta rezultă din condiţiile iniţiale (1.7) care conduc la un sistem liniar şi neomogen. Datorită relaţiilor (1.26), sistemul liniar şi neomogen capătă forma foarte simplă

$$C_1 = y(x_0), \quad C_2 = y'(x_0), \quad \ldots, C_n = y^{(n-1)}(x_0).$$

Deci orice element $y \in \text{Ker}\,(L)$ se exprimă în forma (1.27), ceea ce înseamnă că Ker (L) este $n-$dimensional şi că sistemul $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, ale cărui elemente satisfac condiţiile iniţiale (1.26), formează o bază în Ker (L). ■

Observaţia 1.2.7 *Un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei* (1.8) *este o bază în Ker*(L). *Baza ale cărei elemente satisfac condiţiile iniţiale* (1.26) *este sistemul fundamental normal al ecuaţiei* $L(y) = 0$.

Observaţia 1.2.8 *Wronskianul oricăror* $n+1$ *soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale liniare, de ordinul* n, *omogenă şi cu coeficienţi variabili este identic nul pe intervalul de definiţie al coeficienţilor ecuaţiei.*

Din această observaţie rezultă că dacă sistemul de funcţii $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, definite pe un interval $[a, b]$, este liniar independent, el poate constitui sistemul fundamental de soluţii pentru o ecuaţie diferenţială lniară, de ordinul n, omogenă şi cu coeficienţi variabili. Dacă y este o soluţie oarecare a acestei ecuaţii, atunci sistemul de funcţii $\{y, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ este liniar dependent şi aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă wronskianul asociat acestui sistem de funcţii este nul. Prin urmare, ecuaţia diferenţială căutată este

$$W(y, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0.$$

Exercițiul 1.2.1 *Pe întreaga axă a numerelor reale se definesc funcțiile* y_1, y_2, y_3 *ale căror valori se determină după legile*

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = e^{-x}.$$

Să se arate că aceste funcții sunt liniar independente și să se determine ecuația diferențială de ordinul al treilea, liniară și omogenă care admite ca sistem fundamental de soluții sistemul $\{y_1, y_2, y_3\}$.

Soluție. Se găsește că wronskianul celor trei funcții este $W(x) = (x^2+2x+2)e^{-x}$, ceea ce arată că el este nenul pe mulțimea $I\!R$. Prin urmare, sistemul de funcții $\{y_1, y_2, y_3\}$ poate fi un sistem fundamental de soluții pentru o ecuație diferențială liniară, de ordinul al treilea, omogenă și cu coeficienți variabili. Această ecuație este dată de anularea wronskianului $W(y, y_1, y_2, y_3)$,

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 & y_3 \\ y' & y_1' & y_2' & y_3' \\ y'' & y_1'' & y_2'' & y_3'' \\ y''' & y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x & x^2 & e^{-x} \\ y' & 1 & 2x & -e^{-x} \\ y'' & 0 & 2 & e^{-x} \\ y''' & 0 & 0 & -e^{-x} \end{vmatrix} = 0.$$

Se găsește

$$(x^2+2x+2)y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Această ecuație diferențială are ordinul trei, este omogenă și are coeficienți variabili definiți pe întreaga axă a numerelor reale. ■

Teorema 1.2.7 (**Soluția generală**) *Dacă* $\mathcal{B} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset Ker(L)$ *este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația diferențială liniară de ordinul* n *omogenă* $L(y) = 0$, *atunci soluția generală a acesteia este*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n, \tag{1.28}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *sunt constante arbitrare.*

Demonstrație. Din Observația 1.2.7 și din definiția unei baze într–un spațiu vectorial rezultă că orice alt element al spațiului liniar $\mathrm{Ker}\,(L)$ este de forma (1.28).

Să considerăm mulțimea soluțiilor de forma (1.28). Conform Definiției 1.2.1, aceasta constituie soluția generală a ecuației $L(y) = 0$, deoarece:

1. *Orice element al mulţimii conţine n constante;*

2. *Oricare ar fi constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$, funcţia* (1.28) *este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale $L(y) = 0$ deoarece $Ker(L)$ este un spaţiu liniar $n-$dimensional;*

3. *Oricare ar fi $x^* \in [a, b]$ şi oricare ar fi numerele reale y_1^*, y_2^*, $\cdots$, y_n^*, putem determina în mod unic constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ din* (1.28) *astfel încât y corespunzător să fie soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia diferenţială $L(y) = 0$ cu condiţiile iniţiale*

$$y(x^*) = y_1^*, \quad y'(x^*) = y_2^*, \quad \cdots, y^{(n-1)}(x^*) = y_n^*,$$

căci aceasta revine la a rezolva sistemul liniar şi neomogen

$$\begin{cases} C_1 y_1(x^*) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x^*) & = & y_1^*, \\ C_1 y_1'(x^*) + C_2 y_2'(x^*) + \cdots + C_n y_n'(x^*) & = & y_2^*, \\ \cdots & & \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x^*) + C_2 y_2^{(n-1)}(x^*) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x^*) & = & y_n^*. \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x^*)$, este diferit de zero deoarece mulţimea $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, fiind un sistem fundamental de soluţii, are wronskianul $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ nenul pe $[a, b]$. În consecinţă, sistemul are soluţie unică.

Astfel, teorema este demonstrată. ∎

Observaţia 1.2.9 *Pentru a scrie soluţia generală* (1.28) *a ecuaţiei diferenţiale $L(y) = 0$, este necesară cunoaşterea unui sistem fundamental de soluţii al acesteia.*

Observaţia 1.2.10 *Ecuaţia diferenţială $L(y) = 0$ are o infinitate de sisteme fundamentale de soluţii. Este de ajuns să ne gândim că un sistem fundamental de soluţii este o bază în $Ker(L)$ şi că un spaţiu vectorial finit dimensional are o infinitate de baze. Oricare alt sistem fundamental de soluţii se obţine cu ajutorul unei matrice de trecere nesingulară.*

Definiţia 1.2.8 *Matricea cu o singură linie şi n coloane $\Gamma = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n)$, unde $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială $L(y) = 0$, se numeşte* **matrice fundamentală** *a acestei ecuaţii.*

Observaţia 1.2.11 *Pentru o ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul n cu coeficienţi variabili există o infinitate de matrici fundamentale, oricare două asemenea matrici,* Γ *şi* $\tilde{\Gamma}$*, fiind legate prin*

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot C,$$

unde C *este o matrice pătratică de ordinul* n *nesingulară.*

Exerciţiul 1.2.2 *Fie* y_1, y_2 *soluţii ale ecuaţiei diferenţiale liniară omogenă de ordinul al doilea cu coeficienţi variabili*

$$y'' + (2x - 1)y' + (\sin e^x)y = 0,$$

care satisfac respectiv condiţiile iniţiale:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

Să se determine $W[y_1, y_2]$ *şi să se scrie soluţia generală a ecuaţiei.*

Soluţie. Existenţa şi unicitatea celor două soluţii este asigurată în baza Observaţiei 1.1.1. Valoarea în $x = 0$ a wronskianului celor două soluţii y_1 şi y_2 este

$$W[y_1, y_2](0) = W(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Din Teorema 1.2.2 rezultă că

$$W(x) = W(0) \cdot \exp\Big(- \int_0^x (2t - 1)dt\Big) = W(0) \cdot e^{-x^2 + x}.$$

Prin urmare, wronskianul celor două soluţii este nenul în toate punctele axei reale. Deoarece numărul celor două soluţii este egal cu ordinul ecuaţiei diferenţiale, rezultă că sistemul de soluţii $\{y_1, y_2\}$ este un sistem fundamental de soluţii. Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei date, definită pe întreaga axă a numerelor reale, este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare. ∎

Teorema 1.2.8 *Dacă se cunoaşte o soluţie particulară a ecuaţiei* (1.8), *fie aceea* $y_1(x)$, *atunci prin schimbarea de funcţie*

$$y(x) = y_1 z(x), \tag{1.29}$$

$z(x)$ *fiind noua funcţie necunoscută, ordinul ei poate fi micşorat cu o unitate.*

Demonstraţie. Obţinem succesiv:

$$\begin{array}{lcl} y & = & y_1 z, \\ y' & = & y_1' z + y_1 z', \\ y'' & = & y_1'' z + 2y_1' z' + y_1 z'' \\ \dots & & \\ y^{(n)} & = & y_1^{(n)} z + C_n^1 y_1^{(n-1)} z' + \dots + C_n^n y_1 z^{(n)}. \end{array}$$

Înlocuind acestea în (1.8) şi ţinând cont că $L(y_1) = 0$, deducem o ecuaţie diferenţială de ordinul n având ca necunoscută funcţia $z = z(x)$, care are coeficientul lui z nul. Această ecuaţie conţine derivatele până la ordinul n ale funcţiei z.

Cu o nouă schimbare de variabilă dependentă $z' = u$, obţinem o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul $n - 1$, de forma

$$A_0(x)u^{(n-1)} + A_1(x)u^{(n-1)} + \dots + A_{n-1}(x)u = 0,$$

a cărei necunoscută este funcţia u. ■

Exerciţiul 1.2.3 *Se consideră ecuaţia diferenţială*

$$y'' + \Big(\operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x}\Big)y' + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} y = 0$$

căreia i se cunoaşte soluţia particulară $y_1(x) = \sin x$. *Să se determine soluţia generală a acestei ecuaţii şi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţiile iniţiale*

$$y\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = 0, \quad y'\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = 1.$$

Soluţie. Efectuând schimbarea de funcţie necunoscută $y = z \sin x$ şi ţinând cont de

$$y' = z' \sin x + z \cos x, \quad y'' = z'' \sin x + 2z' \cos x - z \cos x,$$

obţinem

$$\frac{z''}{z'} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Soluţia acestei ecuaţii este $z' = C_1 \cos x$ şi deci $z = C_1 \sin x + C_2$. Ţinând cont că $y = z \sin x$, deducem că soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$y = C_1 \sin^2 x + C_2 \sin x.$$

Impunându–i acestei soluţii generale condiţiile iniţiale, suntem conduşi la sistemul

$$\begin{cases} C_1\sqrt{3} + 2C_2 &= 0, \\ C_1\sqrt{3} + C_2 &= 2, \end{cases}$$

care are soluţia $C_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, $C_2 = -2$.

Deci soluţia problemei lui Cauchy este $y = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\sin^2 x - 2\sin x$. ■

Observaţia 1.2.12 *Dacă* $a_0(x)+a_1(x)+\cdots+a_n(x) = 0$, *atunci* $y = e^x$ *este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale* (1.8), *iar dacă* $a_{n-1}(x)+xa_n(x) = 0$, *ecuaţia* (1.8) *admite soluţia particulară* $y = x$.

Exerciţiul 1.2.4 *Cunoscând o soluţie* $y = y_1(x)$ *a ecuaţiei diferenţiale liniară, omogenă, de ordinul al doilea*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{1.30}$$

să se determine soluţia sa generală.

Soluţie. Împărţind cu $a_0(x)$ şi folosind notaţia

$$p_1(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad p_2(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)},$$

ecuaţia (1.30) devine

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0.$$

Dacă cunoaştem o soluţie y_1 a acestei ecuaţii, atunci, cu schimbarea de funcţie necunoscuta $y = y_1 z$, putem micşora ordinul cu o unitate. Ecuaţia diferenţială în z este

$$y_1(x)z'' + (2y_1'(x) + p_1(x)y_1(x))z' = 0.$$

Această ecuaţie se scrie în forma echivalentă

$$\frac{z''}{z'} + 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p_1(x) = 0.$$

Integrând, obţinem

$$\ln z' + 2\ln y_1(x) = \ln\Big(C_2 \exp\Big(-\int p_1(x)dx\Big)\Big),$$

de unde rezultă

$$z' = \frac{C_2 \exp\Big(-\int p_1(x)dx\Big)}{y_1^2(x)}.$$

Integrând şi această ecuaţie, obţinem

$$z = C_1 + C_2 \int \frac{\exp\Big(-\int p_1(x)dx\Big)}{y_1^2(x)} dx.$$

De aici rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (1.30) este

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_1(x) \int \frac{\exp\Big(-\int p_1(x)dx\Big)}{y_1^2(x)} dx.$$

Din expresia soluţiei generale deducem că un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al doilea este format din funcţia y_1 şi funcţia

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{\exp\Big(-\int p_1(x)dx\Big)}{y_1^2(x)} dx \tag{1.31}$$

determinată cu ajutorul lui $y_1(x)$ şi a unuia din coeficienţii ecuaţiei. ■

Exerciţiul 1.2.5 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y'' + \frac{2}{x} y + y = 0$$

cunoscând că admite soluţia particulară $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

Soluţie. A integra o ecuaţie diferenţială înseamnă a determina toate soluţiile sale. Pentru o ecuaţie diferenţială liniară, aceasta revine la a determina soluţia sa generală. Soluţia generală se poate preciza dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluţii ale acelei ecuaţii.

Conform Exerciţiului 1.2.4, un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia dată este format din $y_1(x)$ şi funcţia $y_2(x)$ dată de (1.31). Avem

$$y_2(x) = \frac{\sin x}{x}\int \frac{x^2}{\sin^2 x}\exp\Big(-\int \frac{2}{x}dx\Big)dx = \frac{\sin x}{x}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{x}.$$

Având un sistem fundamental de soluţii

$$y_1(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2(x) = -\frac{\cos x}{x},$$

soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordinul al doilea este

$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x},$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare. ■

Exerciţiul 1.2.6 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale*

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0.$$

Soluţie. Suma coeficienţilor acestei ecuaţii diferenţiale este zero, prin urmare ecuaţia admite soluţia particulară $y_1 = e^x$. Pe de altă parte, coeficienţii ecuaţiei date sunt polinoame, fapt ce conduce la posibilitatea ca ea să admită ca soluţii particulare polinoame, de exemplu de forma $y_2(x) = ax + b$. Impunând ca y_2 să fie soluţie, găsim $b = a$. Prin urmare, $y_2 = a(x+1)$, cu $a \neq 0$, poate constitui soluţie particulară a ecuaţiei date. Soluţia generală este $y = C_1e^x + C_2(x+1)$. ■

1.3 Ecuaţia diferenţială liniară neomogenă de ordinul n cu coeficienţi variabili

Am văzut că o asemenea ecuaţie diferenţială are forma

$$L(y) = f(x), \tag{1.32}$$

unde

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y. \tag{1.33}$$

În ecuaţia diferenţială (1.32), $y \in C^n([a,b])$ este funcţia necunoscută, $f \in C^0([a,b])$ este termenul liber al ecuaţiei, $a_0, a_2, \ldots, a_n \in C^0([a,b])$ sunt coeficienţii ecuaţiei, iar $a_0(x) \neq 0$ pe $[a,b]$.

Ecuaţia diferenţială

$$L(y) = 0 \tag{1.34}$$

a fost denumită ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei (1.32).

În paragraful precedent am demonstrat că soluţia generală y_o a ecuaţiei omogene asociate este

$$y_o = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \tag{1.35}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante arbitrare, iar $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ este un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei (1.34).

Teorema 1.3.1 (**Soluţia generală a ecuaţiei neomogene**) *Dacă y_o este soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate* (1.34) *şi y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene* (1.32), *atunci*

$$y = y_o + y_p \tag{1.36}$$

este soluţia generală a ecuaţiei (1.32).

Demonstraţie. Deoarece y_p este o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (1.32) rezultă

$$L(y_p) = f(x), \quad (\forall)\ x \in [a,b], \tag{1.37}$$

iar din faptul că y_o este soluţia generală a ecuaţiei omogene asociată ecuaţiei (1.32), avem

$$L(y_o) = 0, \quad (\forall)\ x \in [a,b]. \tag{1.38}$$

Relaţiile (1.37) şi (1.38) demonstrează că (1.36) este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale neomogene (1.32).

Soluţia (1.36) conţine n constante arbitrare.

Pentru ca (1.36) să fie soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.32), mai trebuie arătat că problema lui Cauchy pentru ecuaţia (1.32) cu condiţiile iniţiale oarecare

$$y(x_0) = y_1^0, \quad y'(x_0) = y_2^0, \quad \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0, \tag{1.39}$$

are soluţie unică în mulţimea funcţiilor de forma (1.36), adică putem determina în mod unic constantele C_1^0, C_2^0, $\cdots$, C_n^0 astfel încât funcţia

$$y = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \cdots + C_n^0 y_n(x) + y_p(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.40}$$

să satisfacă condiţiile iniţiale (1.39). Pentru aceasta ar trebui ca sistemul liniar şi neomogen de n ecuaţii cu n necunoscute

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) & = & y_1^0 - y_p(x_0), \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) & = & y_2^0 - y_p(x_0), \\ \cdots, \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) & = & y_n^0 - y_p(x_0) \end{cases}$$

să aibă soluţie unică.

Determinantul sistemului, $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0)$, este diferit de zero deoarece $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ este sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială omogenă (1.34). În consecinţă, sistemul are soluţia unică C_1^0, C_2^0, $\ldots$, C_n^0. ■

Teorema 1.3.2 *Dacă* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *este un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul* n *neomogenă cu coeficienţi variabili* (1.32) *şi funcţiile* u_1, u_2, $\cdots$, u_n, *derivabile pe intervalul real* $[a, b]$, *sunt astfel încât derivatele lor satisfac sistemul liniar şi neomogen*

$$\begin{cases} y_1(x)u_1'(x) + y_2(x)u_2'(x) + \cdots + y_n(x)u_n'(x) = 0, \\ y_1'(x)u_1'(x) + y_2'(x)u_2'(x) + \cdots + y_n'(x)u_n'(x) = 0, \\ \cdots \\ y_1^{(n-2)}(x)u_1'(x) + y_2^{(n-2)}(x)u_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-2)}(x)u_n'(x) = 0, \\ y_1^{(n-1)}(x)u_1'(x) + y_2^{(n-1)}(x)u_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-1)}(x)u_n'(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}, \end{cases} \tag{1.41}$$

atunci funcţia

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x), \quad x \in [a, b], \tag{1.42}$$

este o soluţie particulară a ecuaţiei diferenţiale neomogene (1.32).

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că avem

$$L(y_p) = f(x). \tag{1.43}$$

Pentru aceasta trebuie să determinăm expresiile derivatelor până la ordinul n ale funcţiei y_p din (1.42). Având în vedere (1.41), rezultă că

$$y'_p(x) = u_1(x)y'_1(x) + u_2(x)y'_2(x) + \cdots + u_n(x)y'_n(x),$$

$$y''_p(x) = u_1(x)y''_1(x) + u_2(x)y''_2(x) + \cdots + u_n(x)y''_n(x),$$

$$\ldots,$$

$$y_p^{(n-1)}(x) = u_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + u_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(n-1)}(x),$$

$$y_p^{(n)}(x) = u_1(x)y_1^{(n)}(x) + u_2(x)y_2^{(n)}(x) + \cdots + u_n(x)y_n^{(n)}(x) + \frac{f(x)}{a_0(x)}.$$

Din aceste derivate şi (1.42) rezultă (1.43). ■

Exerciţiul 1.3.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială liniară, de ordinul al doilea, cu coeficienţi variabili, neomogenă* $xy'' - y' = x^2$, *pe intervalul nemărginit* $(0, +\infty)$.

Soluţie. Ecuaţia omogenă asociată ecuaţiei date, $xy'' - y = 0$, se scrie în forma echivalentă $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{1}{x}$, din care deducem $d(\ln y') = d(\ln x)$.

Diferenţialele a două funcţii sunt egale dacă şi numai dacă funcţiile diferă printr–o constantă. Prin urmare, $\ln y' = \ln x + \ln(2C_2)$, unde C_2 este o constantă reală pozitivă.

Ultima egalitate conduce la $y' = 2C_2x$ şi, de aici, putem afirma că orice soluţie a ecuaţiei omogene asociate este o funcţie strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.

Integrând ecuaţia liniară $y' = 2C_2x$, obţinem $y = C_1 + C_2x^2$, unde C_1 este o constantă reală arbitrară.

Din faptul că sistemul de funcţii $\{1, x^2\}$ este liniar independent în spaţiul liniar $C^2([0, +\infty))$ rezultă că $y_1 = 1$ şi $y_2 = x^2$ constituie un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia omogenă asociată.

Căutând soluţia particulară $y_p(x)$ de forma $y_p(x) = u_1(x) + x^2u_2(x)$, rezultă că derivatele funcţiilor u_1 şi u_2 trebuie să verifice sistemul

$$\begin{cases} u'_1 + x^2u'_2 = 0, \\ \qquad 2xu'_2 = \dfrac{x^2}{x}. \end{cases}$$

Soluţia acestui sistem este $u'_1 = -\dfrac{1}{2}x^2$, $u'_2 = \dfrac{1}{2}$.

Determinând câte o primitivă, găsim $u_1(x) = -\dfrac{x^3}{6}$, $u_2(x) = \dfrac{1}{2}x$.

Prin urmare, o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene este

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{3}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este $y = C_1 + C_2x^2 + \dfrac{x^3}{3}$. ■

Observaţia 1.3.1 *Din* (1.28) *şi* (1.42) *deducem că, formal, o soluţie particulară a unei ecuaţii diferenţiale liniară şi neomogenă de ordinul* n *cu coeficienţi variabili se obţine din soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate trecând constantele în funcţii, adică prin variaţia constantelor. Ideea acestei treceri aparţine lui Lagrange şi din acest motiv metoda de determinare a unei soluţii particulare este cunoscută ca* **metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange**.

Dacă soluţia sistemului (1.41) este

$$u_1'(x) = f_1(x), \quad u_2'(x) = f_2(x), \quad \ldots, \quad u_n'(x) = f_n(x),$$

atunci determinarea funcţiilor $u_1, u_2, \ldots, u_n$ se reduce la cuadraturile

$$u_j(x) = K_j + \int_{x_0}^{x} f_j(t)dt, \quad j = \overline{1,n}, \tag{1.44}$$

unde $K_1, K_2, \ldots, K_n$ sunt constante oarecare.

Înlocuind pe $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ în egalitatea (1.42), obţinem soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogene (1.1)

$$y = K_1y_1 + K_2y_2 + \cdots + K_ny_n + Y, \tag{1.45}$$

unde

$$Y = y_1(x)\int_{x_0}^{x} f_1(t)dt + y_2(x)\int_{x_0}^{x} f_2(t)dt + \cdots + y_n(x)\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt, \tag{1.46}$$

care depinde de n constante oarecare $K_1, K_2, \ldots, K_n$, cu ajutorul căreia se poate rezolva o problema a lui Cauchy a ecuaţiei diferenţiale (1.1) pentru orice $x \in [a,b]$ şi orice date iniţiale $(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) \in I\!R^n$.

Este important de reţinut forma ecuaţiei (1.45). În această ecuaţie, $Y(x)$ este o soluţie a ecuaţiei neomogene (1.1) care se obţine din ecuaţia (1.44) luând $K_1 = 0, K_2 = 0, \ldots, K_n = 0$.

Observaţia 1.3.2 *Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale linaiare neomogenă se obţine adăugând la soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.*

1.4 Ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniare omogene cu coeficienţi constanţi

În acest paragraf ne vom ocupa de integrarea ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene de ordinul n

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{1.47}$$

în care coeficienţii $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sunt constante reale.

Coeficienţii ecuaţiei (1.47) pot fi însă şi numere complexe.

Tipul de ecuaţie diferenţială (1.47) constituie unul din exemplele cele mai interesante de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n deoarece se integrează uşor cu ajutorul unor funcţii elementare.

Metoda de integrare a fost elaborată de Euler şi se bazează pe două identităţi importante.

1.4.1 Identitaţile lui Euler

Teorema 1.4.1 *Operatorul liniar L din* (1.47) *verifică identitatea*

$$L(e^{rx}) = e^{rx} K(r), \tag{1.48}$$

unde

$$K(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k r^{n-k}. \tag{1.49}$$

Demonstraţie. Pentru funcţia $y = e^{rx}$ avem

$$y'(x) = re^{rx}, \quad y''(x) = r^2 e^{rx}, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = r^{n-1} e^{rx}, \quad y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

şi de aici rezultă că

$$L(e^{rx}) = e^{rx}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n),$$

adică avem identitatea (1.48). ∎

Teorema 1.4.2 *Dacă în $L(y)$ se înlocuieşte y cu $z\, e^{rx}$, unde z este o funcţie de x, de n ori derivabilă pe $\mathbb{R}$, se obţine identitatea*

$$L(z\, e^{rx}) = \Big[K(r) z + \frac{K'(r)}{1!} z' + \frac{K''(r)}{2!} z'' + \cdots + \frac{K^{(n)}(r)}{n!} z^{(n)}\Big] e^{rx}. \tag{1.50}$$

Demonstraţie. Pentru a demonstra această identitate se observă că avem nevoie de derivata de ordinul k, unde k ia toate valorile întregi de la zero până la n, a funcţiei $y = z\,e^{rx}$. Aplicând formula de derivare de ordinul k a unui produs de două funcţii, obţinem

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= (r^k z + C_k^1 r^{k-1} z' + C_k^2 r^{k-2} z'' + \cdots + C_k^k z^{(k)}) e^{rx} = \\ &= e^{rx} \sum_{s=0}^{k} C_k^s r^{k-s} z^{(s)}. \end{aligned} \tag{1.51}$$

Se observă că expresia lui $L(y)$ se scrie

$$L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} y^{(k)}. \tag{1.52}$$

Introducând (1.51) în (1.52), obţinem

$$L(z\,e^{rx}) = e^{rx} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \sum_{s=0}^{k} C_k^s r^{k-s} z^{(s)} = e^{rx} \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{k} C_k^s a_{n-k} r^{k-s} z^{(s)}. \tag{1.53}$$

Coeficientul derivatei de ordinul p a funcţiei z este $\dfrac{1}{p!} K^{(p)}(r)\, e^{rx}$. Folosind acest rezultat, deducem identitatea (1.50). ■

Definiţia 1.4.1 *Polinomul $K(r)$ din* (1.49) *se numeşte* **polinomul caracteristic** *al ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordin n cu coeficienţi constanţi, iar ecuaţia*

$$K(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k r^{n-k} = 0 \tag{1.54}$$

se numeşte **ecuaţie caracteristică**. *Rădăcinile ecuaţiei* (1.54) *se numesc* **rădăcini caracteristice**.

Din teorema fundamentală a algebrei rezultă că ecuaţia caracteristică, având gradul n, are, în corpul comutativ al numerelor complexe, n rădăcini. Coeficienţii ecuaţiei caracteristice fiind numere reale, rezultă că dacă $r = \alpha + i\beta$ este o rădăcină caracteristică, atunci conjugata acesteia $\bar{r} = \alpha - i\beta$ este de asemeni o rădăcină caracteristică. Aceste rădăcini, reale sau complex conjugate în perechi, pot fi distincte sau multiple.

În continuare vom analiza diverse cazuri în care se pot plasa rădăcinile caracteristice şi, de fiecare dată, vom arăta cum se determină un sistem fundamental de soluţii a ecuaţiei (1.47) şi soluţia sa generală.

1.4.2 Cazul rădăcinilor caracteristice reale distincte

Teorema 1.4.3 *Dacă toate rădăcinile* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *ale ecuaţiei caracteristice* (1.54) *sunt reale şi distincte, atunci funcţiile*

$$y_1(x) = e^{r_1 x}, \quad y_2(x) = e^{r_2 x}, \quad \cdots, \quad y_n(x) = e^{r_n x}, \tag{1.55}$$

sunt soluţii liniar independente ale ecuaţiei (1.47) *şi soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale* (1.47) *este*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}. \tag{1.56}$$

Demonstraţie. Conform Teoremei 1.4.1, fiecare din funcţiile (1.55) verifică ecuaţia (1.47). Aceste funcţii formează un sistem fundamental de soluţii deoarece wronskianul lor este produsul dintre $e^{(r_1+r_2+\cdots+r_n)x} = e^{-\frac{a_1}{a_0}x}$ şi determinantul Vandermonde al numereleor distincte $r_1, r_2, \ldots, r_n$ şi este deci diferit de zero.

Dar un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (1.47) este format din elemente liniar independente din spaţiul vectorial $C^n(\mathbb{R})$.

În această situaţie, soluţia generală a ecuaţiei (1.1) este evident (1.56) şi teorema este demonstrată. ■

Exerciţiul 1.4.1 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare, omogenă, cu coeficienţi constanţi*

$$y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0$$

şi să se rezolve problema lui Cauchy a acestei ecuaţii cu condiţiile iniţiale

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 7.$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică, $r^3 - 7r^2 + 14r - 8 = 0$, are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 4$ şi sistemul fundamental de soluţii $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{4x}$. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{4x}$.

Impunând soluţiei generale să satisfacă condiţiile iniţiale, gasim sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 & = & 1, \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 & = & -1, \\ C_1 + 4C_2 + 16C_3 & = & 7, \end{cases}$$

care are soluţia unică $C_1 = 7,\ C_2 = -8,\ C_3 = 2.$

Prin urmare, soluţia problemei Cauchy este $y = 7e^x - 8e^{2x} + 2e^{4x}$. ■

1.4.3 Cazul rădăcinilor caracteristice complexe distincte

Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcina complexă $r = \alpha + i\beta$, ea fiind una u coeficienţi reali, admite ca rădăcină şi conjugata complexă a acesteia, adică pe $\bar{r} = \alpha - i\beta$. În acest caz, ordinul n al ecuaţiei diferenţiale trebuie să fie un număr par, $n = 2m$.

Să presupunem că rădăcinile ecuaţiei caracteristice sunt numerele complexe distincte

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_m, \quad r_{m+1}, \quad \ldots, \quad r_{2m}$$

şi că r_{m+j} este conjugata lui r_j.

Prin urmare, expresiile acestor rădăcini sunt

$$\begin{array}{llll} r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, & r_2 = \alpha_2 + i\beta_2, & \cdots, & r_m = \alpha_m + i\beta_m, \\ r_{m+1} = \alpha_1 - i\beta_1, & r_{m+2} = \alpha_2 - i\beta_2, & \cdots, & r_{2m} = \alpha_m - i\beta_m. \end{array} \tag{1.57}$$

Conform celor prezentate, rădăcinilor caracteristice (1.57) le corespund soluţiile liniar independente

$$\begin{array}{llll} \widetilde{y}_1 = e^{(\alpha_1 + i\beta_1)x}, & \widetilde{y}_2 = e^{(\alpha_2 + i\beta_2)x}, & \cdots, & \widetilde{y}_m = e^{(\alpha_m + i\beta_m)x}, \\ \widetilde{y}_{m+1} = e^{(\alpha_1 - i\beta_1)x}, & \widetilde{y}_{m+2} = e^{(\alpha_2 - i\beta_2)x}, & \cdots, & \widetilde{y}_{2m} = e^{(\alpha_m - i\beta_m)x}, \end{array} \tag{1.58}$$

care sunt însă funcţii cu valori numere complexe.

Relaţiile

$$e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \;\; e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \tag{1.59}$$

şi faptul că ecuaţia diferenţială (1.47) este liniară conduc la concluzia că funcţiile obţinute din (1.58) prin anumite combinaţii liniare, care se vor vedea mai jos, sunt de asemeni soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1.47), cu precizarea că de data aceasta, spre deosebire de (1.58), ele vor fi reale. Aceste combinaţii liniare sunt

$$y_j = \frac{\widetilde{y}_j + \widetilde{y}_{m+j}}{2}, \quad y_{m+j} = \frac{\widetilde{y}_j - \widetilde{y}_{m+j}}{2i}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1.60}$$

Matricea de trecere de la sistemul fundamental de soluţii (1.58) la sistemul de soluţii (1.60) este nesingulară, prin urmare sistemul de soluţii (1.60) este de asemeni un sistem fundamental de soluţii.

Din (1.58), (1.59) şi (1.60) rezultă că expresiile acestor soluţii sunt

$$\begin{cases} y_1 = e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & y_{m+1} = e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\ y_2 = e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, & y_{m+2} = e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, \\ \quad\ldots & \quad\ldots \\ y_m = e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x, & y_{2m} = e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x. \end{cases} \tag{1.61}$$

În acest caz, soluţia generală a ecuaţiei (1.47) este

$$y = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k x}(C_k \cos\beta_k x + C_{j+k}\sin\beta_k x). \tag{1.62}$$

Exerciţiul 1.4.2 *Să se integreze ecuaţia diferenţială* $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică corespunzătoare, $r^2 + 4r + 13 = 0$, are rădăcinile complex conjugate

$$r_1 = -2 + 3i, \quad r_2 = -2 - 3i.$$

Conform celor prezentate, sistemul fundamental de soluţii este format din funcţiile

$$y_1(x) = e^{-2x}\cos 3x, \quad y_2(x) = e^{-2x}\sin 3x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. ■

1.4.4 Ecuaţia caracteristică are rădăcini distincte

Să presupunem că rădăcinile ecuaţiei caracteristice (1.54), reale şi complex conjugate, sunt distincte. Primele $2m$ dintre ele sunt complex conjugate în perechi, adică de forma

$$r_j = \alpha_j + i\beta_j, \quad r_{m+j} = \alpha_j - i\beta_j, \quad j = \overline{1,m},$$

iar celelalte $n - 2m$ sunt reale şi notate cu r_{2m+s}, unde $s \in \overline{1, n-2m}$.

Contribuţia rădăcinilor complex conjugate la un sistem fundamental de soluţii este format din funcţiile

$$y_k(x) = e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \quad y_{m+k}(x) = e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, \quad k = \overline{1,m}, \tag{1.63}$$

iar aportul celor reale se constituie din funcţiile

$$y_{2m+s}(x) = e^{r_{2m+s}x}, \quad s \in \overline{1, n-2m}. \tag{1.64}$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.47) este în acest caz

$$y = \sum_{k=1}^{m}(C_k \cos \beta_k x + C_{m+k} \sin \beta_k x)e^{\alpha_k x} + \sum_{s=1}^{n-2m} C_{2m+s}e^{r_{2m+s}x}. \qquad (1.65)$$

Exerciţiul 1.4.3 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi*

$$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică, $r^3 + 3r^2 + 4r + 2 = 0$, are toate rădăcinile simple: $r_1 = -1 + i$; $r_2 = -1 - i$; $r_3 = -1$. Contribuţia la un sistem fundamental de soluţii a rădăcinilor caracteristice complex conjugate este formată din funcţiile

$$y_1(x) = e^{-x} \cos x, \quad y_2(x) = e^{-x} \sin x,$$

iar cea a rădăcinii reale este $y_3(x) = e^{-x}$. Aceste contribuţii formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială dată şi deci soluţia generală a acesteia este $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x} + C_3e^{-x}$. ■

1.4.5 Ecuaţia caracteristică are o rădăcină multiplă

Să revenim la cazul general al ecuaţiei diferenţiale (1.47) în care coeficienţii sunt constante reale şi să presupunem că ecuaţia caracteristică (1.54) are rădăcina $r = r_1$ multiplă de ordinul p, unde $2 \leq p \leq n$. Înlocuind în identitatea (1.50) pe r cu r_1 şi ţinând seama că

$$K(r_1) = 0, \quad K'(r_2) = 0, \quad \cdots, \quad K^{(p-1)}(r_1) = 0, \quad K^{(p)}(r_1) \neq 0,$$

obţinem

$$L(z \cdot e^{r_1 x}) = e^{r_1 x}\Big[\frac{K^{(p)}(r_1)}{p!}z^{(p)} + \frac{K^{(p+1)}(r_1)}{(p+1)!}z^{(p+1)} + \cdots + \frac{K^{(n)}(r_1)}{n!}z^{(n)}\Big]. \qquad (1.66)$$

Dacă z se înlocuieşte cu oricare din funcţiile

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad \ldots, x^{p-1},$$

paranteza din membrul al doilea al relaţiei (1.66) este nulă şi, prin urmare, avem

$$L(e^{r_1 x}) = 0, \quad L(xe^{r_1 x}) = 0, \quad L(x^2 e^{r_1 x}) = 0, \quad \ldots, \quad L(x^{p-1}e^{r_1 x}) = 0,$$

ceea ce dovedeşte că funcţiile

$$e^{r_1 x}, \quad x e^{r_1 x}, \quad x^2 e^{r_1 x}, \quad \ldots, x^{p-1} \cdot e^{r_1 x} \tag{1.67}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1.47).

Înmulţind aceste soluţii cu constante oarecare şi adunându–le deducem că la rădăcina caracteristice $p-$multiplă $r = r_1$ corespunde soluţia

$$y = e^{r_1 x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots + C_p x^{p-1}) \tag{1.68}$$

care depinde de p constante arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_p$ şi care se mai poate scrie sub forma

$$y = e^{r_1 x} Q_{p-1}(x), \tag{1.69}$$

unde $Q_{p-1}(x)$ este un polinom oarecare de gradul $p - 1$.

Observaţia 1.4.1 *Dacă rădăcina caracteristică multiplă r_1, de multiplicitate p, este complexă, deci este de forma $r_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, atunci şi conjugata complexă a acesteia, $\bar{r_1} = \alpha_1 - i\beta_1$, este rădăcină $p-$multiplă. Procedând ca în cazul rădăcinilor caracteristice complexe distincte şi ţinând cont de* (1.68), *rezultă că funcţia*

$$y = e^{\alpha_1 x}\Big(Q_{p-1}(x)\cos\beta_1 x + R_{p-1}(x)\sin\beta_1 x\Big), \tag{1.70}$$

unde $Q_{p-1}(x)$ şi $R_{p-1}(x)$ sunt polinoame de grad $p-1$ cu coeficienţi numere reale arbitrare, este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale (1.47).

Exerciţiul 1.4.4 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare, omogene, cu coeficienţi constanţi $y^{(4)} + 2y'' + 3y'' + 2y' + y = 0$.*

Soluţie. Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei date, $r^4 + 2r^3 + 3r^2 + 2r + 1 = 0$, este o ecuaţie reciprocă şi se rezolvă utilizând substituţia $r + \dfrac{1}{r} = u$. Se găsesc rădăcinile

$$r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

de multiplicităţi $p_1 = 2$ respectiv $p_2 = 2$.

Primei rădăcini caracteristice duble îi corespunde soluţiile

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad y_2 = x e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2},$$

iar cea de a doua conduce la soluţiile

$$y_3 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}, \quad y_4 = xe^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Deoarece numărul acestor soluţii este egal cu ordinul ecuaţiei diferenţiale, rezultă că soluţia sa generală este

$$y = \Big[(C_1 + C_2 x) \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_4 x) \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}\Big] e^{-\frac{x}{2}}.$$

Folosind soluţia generală determinată, se poate rezolva orice problemă a lui Cauchy pentru această ecuaţie diferenţială dată. ■

1.4.6 Cazul rădăcinilor caracteristice reale multiple

Teorema 1.4.4 *Dacă ecuaţia caracteristică* (1.54) *are* m *rădăcini reale multiple* $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_m$*, de respectiv multiplicităţile* $p_1, p_2, \ldots, p_m$*, unde* $p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n$*, atunci funcţiile*

$$e^{r_j x}, \quad x e^{r_j x}, \quad x^2 e^{r_j x}, \quad \ldots, \quad x^{p_j - 1} e^{r_j x}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.71}$$

formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială (1.47)*, iar funcţia*

$$y = e^{r_1 x} Q_{p_1 - 1}(x) + e^{r_2 x} Q_{p_2 - 1}(x) + \cdots + e^{r_m x} Q_{p_m - 1}(x), \tag{1.72}$$

unde $Q_{p_1-1}(x),\ Q_{p_2-1}(x), \ldots, Q_{p_m-1}(x)$ *sunt polinoame cu coeficienţi reali arbitrari de gradele indicate de indicele fiecăruia, este soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale* (1.47).

Demonstraţie. Presupunem, prin absurd, că soluţiile (1.71) nu formează un sistem fundamental pentru (1.47). Atunci, există constantele reale

$$h_{j_1}, \quad h_{j_2}, \quad h_{j_3}, \quad \ldots, \quad h_{j_{p_j}}, \quad j = \overline{1, m}, \tag{1.73}$$

nu toate nule, astfel încât, înmulţind fiecare soluţie din tabloul (1.71) cu constantele corespunzătoare din tabloul (1.73) şi adunându–le, să obţinem

$$\sum_{j=1}^{m} (h_{j_1} e^{r_j x} + h_{j_2} x e^{r_j x} + h_{j_3} x^2 e^{r_j x} + \cdots + h_{j_{p_j}} x^{p_j - 1} e^{r_j x}) = 0. \tag{1.74}$$

Dar (1.74) se poate scrie sub forma egalităţii

$$e^{r_1 x} H_1(x) + e^{r_2 x} H_2(x) + e^{r_3 x} H_3(x) + \cdots + e^{r_m x} H_m(x) = 0, \tag{1.75}$$

unde

$$H_j(x) = h_{j_1} + h_{j_2} x + h_{j_3} x^2 + \cdots + h_{j_{p_j}} x^{p_j - 1}, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{1.76}$$

care are loc pe întreaga axă a numerelor reale.

Constantele din (1.73) nefiind toate nule, polinoamele (1.76) nu sunt toate identic nule. Să presupunem că notaţiile au fost astfel alese încât ultimul polinom, $H_m(x)$, este neidentic nul.

Fie $h_1, h_2, \ldots, h_m$ gradele polinoamelor introduse în (1.76). Din demonstraţia pe care o vom prezenta vom vedea că presupunerea ca $H_m(x)$ să fie neidentic nul nu este posibilă.

Pentru aceasta, înpărţim ambii membri ai egalităţii (1.75) cu $e^{r_1 x}$ şi apoi derivăm de h_1 ori.

Procedând astfel, polinomul $H_1(x)$ dispare şi obţinem o ecuaţie de forma

$$e^{(r_2 - r_1)x} H_{2,1}(x) + e^{(r_3 - r_1)x} H_{3,1}(x) + \cdots + e^{(r_m - r_1)} H_{m,1}(x) = 0, \tag{1.77}$$

în care polinoamele $H_{2,1}(x)$, $H_{3,1}(x)$, $\ldots$, $H_{m,1}(x)$ au aceleaşi grade cu respectiv polinoamele $H_2(x), H_3(x), \ldots, H_m(x)$, polinomul $H_{m,1}(x)$ nefiind identic nul.

Aplicând din nou procedeul care a condus la egalitatea (1.77), dar în care operatorul de derivare se aplică de $h_2 + 1$ ori, se ajunge la egalitatea

$$e^{(r_3 - r_2)x} H_{3,2}(x) + e^{(r_4 - r_2)x} H_{4,2}(x) + \cdots + e^{(r_m - r_2)} H_{m,2}(x) = 0, \tag{1.78}$$

în care polinoamele $H_{3,2}(x), H_{4,2}(x), \ldots, H_{m,2}(x)$ au respectiv aceleaşi grade ca şi polinoamele $H_3(x), H_4(x), \ldots, H_m(x)$, polinomul $H_{m,2}(x)$ nefiind identic nul.

Procedeul continuă până se ajunge la egalitatea

$$e^{(r_m - r_{m-1})x} H_{m,n-1}(x) = 0,$$

care trebuie să fie adevărată pe toată axă a numerelor reale şi în care polinomul $H_{m,m-1}(x)$ are gradul m şi nu este identic nul. Simplificând prin $e^{(r_m - r_{m-1})x}$, ajungem la concluzia că $H_{m,n-1}(x) = 0$, oricare ar fi $x \in I\!R$. Aceasta este însă imposibil.

Contradicţia la care s–a ajuns demonstrează că toate constantele din (1.73) sunt nule şi deci sistemul de funcţii din tabloul (1.71) este liniar independent.

Prin urmare, sistemul de funcţii (1.71) constituie un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia (1.47).

Înmulţirea soluţiilor fundamentale (1.71) cu constante reale oarecare, urmată de adunarea lor, conduce la concluzia că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.47) este de forma (1.72) şi astfel teorema este complet demonstrată. ■

Exerciţiul 1.4.5 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare, omogene, cu coeficienţi constanţi* $y^{(4)} - 2y''' - 3y'' + 4y' + 4y = 0.$

Soluţie. Ecuaţia caracteristica, $r^4 - 2r^3 - 3r^2 + 4r + 4 = 0$, are rădăcinile duble $r_1 = -1$ şi $r_2 = 2$.

Un sistem fundamental de soluţii este format din funcţiile

$$y_1(x) = e^{-x}, \quad y_2(x) = xe^{-x}, \quad y_3(x) = e^{2x}, \quad y_4(x) = xe^{2x}.$$

Prin urmare, soluţia generală este $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^{2x}$.■

1.4.7 Rădăcini caracteristice complex conjugate multiple

Teorema 1.4.5 *Dacă ecuaţia carecateristică* (1.54) *are* m *rădăcini complexe*

$$r_1 = \alpha_1 + i\beta_1, r_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \ldots, r_m = \alpha_m + i\beta_m, \tag{1.79}$$

de multiplicităţi respectiv egale cu $p_1, p_2, \ldots, p_m$*, atunci* $2(p_1+p_2+\cdots+p_m) = n$*, tabloul de soluţii ale ecuaţiei diferenţiale* (1.47)

$$\begin{array}{lllll} e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & xe^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & x^2e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, & \ldots, & x^{p_j-1}e^{\alpha_j x}\cos\beta_j x, \\ e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & xe^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & x^2e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, & \ldots, & x^{p_j-1}e^{\alpha_j x}\sin\beta_j x, \end{array} \tag{1.80}$$

unde j *ia toate valorile întregi de la* 1 *până la* m*, formează un sistem fundamental de soluţii şi*

$$y = \sum_{j=1}^{m} e^{\alpha_j x}\Big[Q_{p_j-1}(x)\cos\beta_j x + R_{p_j-1}(x)\sin\beta_j x\Big] \tag{1.81}$$

este soluţia generală a aceastei ecuaţii diferenţiale.

Demonstraţie. Ecuaţia caracteristică (1.54) fiind cu coeficienţi reali, va admite ca rădăcini şi conjugatele complexe ale acestora

$$\bar{r}_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \bar{r}_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \ldots, \bar{r}_m = \alpha_m - i\beta_m,$$

cu respectiv aceleaşi multiplicităţi. Acestea, înpreună cu cele din (1.79), sunt toate rădăcinile caracteristice, prin urmare ordinul ecuaţiei diferenţiale trebuie să fie astfel încât $2(p_1 + p_2 + \cdots + p_m) = n$.

La aceste rădăcini corespund următoarele soluţii ale ecuaţiei (1.47)

$$\begin{array}{lllll} e^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, & xe^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, & x^2e^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, & \ldots, & x^{p_j-1}e^{(\alpha_j+i\beta_j)x}, \\ e^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, & xe^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, & x^2e^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, & \ldots, & x^{p_j-1}e^{(\alpha_j-i\beta_j)x}, \end{array} \tag{1.82}$$

unde j ia toate valorile întregi de la 1 până la m. Toate acestea formează un sistem fundamental de soluţii.

Se doreşte însă ca sistemul fundamental de soluţii să conţină funcţii reale şi nu complexe ca în (1.82).

Efectuând semisuma şi semidiferenţa împărţită prin i ale soluţiilor aflate pe aceeaşi verticală în tabloul (1.82), obţinem alte n soluţii, de data aceasta reale, şi anume cele din tabloul (1.80).

Tabloul de soluţii astfel obţinut formează de asemeni un sistem fundamental de soluţii astfel că soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.47) este o combinaţie liniară a celor din (1.82) care se poate scrie în cele din urmă în forma (1.81). ∎

Exerciţiul 1.4.6 *Să se integreze ecuaţia diferenţială liniară, omogenă, cu coeficienţi constanţi* $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii diferenţiale este $r^8 + 8r^4 + 16 = 0$. Cu substituţia $r^4 = t$, această ecuaţie devine $t^2 + 8t + 16 = 0$, care are rădăcina dublă $t = -4$. Pentru a afla rădăcinile caracteristice trebuie să rezolvăm ecuaţia $r^4 = -4$. Deoarece $-4 = (2i)^2$, rezultă că ultima ecuaţie este echivalentă cu ecuaţiile $r^2 = 2i$ şi $r^2 = -2i$. Scriind că $\pm 2i = (1 \pm i)^2$ deducem că rădăcinile caracteristice sunt $r_{1,2} = \pm(1+i)$ şi $r_{3,4} = \pm(1-i)$, fiecare având multiplicitatea 2.

Tabloul celor opt soluţii liniar independente, corespunzător cazului general (1.80), este

$$\begin{array}{llll} e^x \cos x, & xe^x \cos x, & e^{-x} \cos x, & xe^{-x} \cos x, \\ e^x \sin x, & xe^x \sin x, & e^{-x} \sin x, & xe^{-x} \sin x. \end{array} \tag{1.83}$$

Întrucât tabloul de funcţii (1.83) formează un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială dată, rezultă că soluţia sa generală este

$$\begin{aligned} y &= e^x\Big[(C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x\Big] + \\ &+ e^{-x}\Big[(C_5 + C_6x)\cos x + (C_7 + C_8x)\sin x\Big], \end{aligned}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_8$ sunt constante reale arbitrare. ∎

1.4.8 Rădăcini caracteristice reale şi complexe multiple

Să considerăm acum cazul general în care ecuaţia caracteristică are atât rădăcini reale cât şi complex conjugate, fiecare dintre ele putând fi şi multiplă. De altfel, chiar şi o rădăcină simplă poate fi considerată multiplă, multiplicitatea sa fiind egală cu 1.

Teorema 1.4.6 *Dacă coeficienţii ecuaţiei diferenţiale* (1.47) *sunt constante reale, iar ecuaţia caracteristică corespunzătoare are rădăcinile reale multiple* $r_1, r_2, \ldots, r_k$ *de multiplicităţi* $p_1, p_2, \ldots, p_m$ *şi rădăcinile complexe multiple*

$$r_{m+1} = \alpha_1 + i\beta_1, \quad r_{m+2} = \alpha_2 + i\beta_2, \quad \ldots, \quad r_{m+k} = \alpha_k + i\beta_k,$$

cu ordinele de multiplicitate $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{m+k}$, *unde*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m + 2(p_{m+1} + p_{m+2} + \cdots + p_{m+k}) = n,$$

atunci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (1.47), *în formă reală, este*

$$y = \sum_{j=1}^{m} e^{r_j x} Q_{p_j-1}(x) + \sum_{q=1}^{k} e^{\alpha_q x}\Big[R_{p_{m+q}-1}(x)\cos\beta_q x + S_{p_{m+q}-1}(x)\sin\beta_q x\Big],$$

unde $Q_{p_j-1}(x)$, $R_{p_{m+q}-1}(x)$ *şi* $S_{p_{m+q}-1}(x)$ *sunt polinoame cu coeficienţi numere reale arbitrare de grade* $p_j - 1$, $p_{m+q} - 1$ *şi respectiv* $p_{m+q} - 1$.

Demonstraţie. Analiza demonstraţiilor celorlalte teoreme ale acestui paragraf sugerează demonstraţia acestei teoreme care poate fi efectuată fără dificultate. ∎

Exerciţiul 1.4.7 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y^{(8)} - 2y^{(6)} + 16y^{(5)} + 25y^{(4)} + 32y''' + 60y'' + 16y' + 32y = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii diferenţiale este

$$r^8 - 2r^6 + 16r^5 + 25r^4 + 32r^3 + 60r^2 + 16r + 32 = 0.$$

Căutând rădăcinile întregi, constatăm că singura rădăcină de acest tip este $r_1 = -2$ de multiplicitate $p_1 = 2$.

Împărţind polinomul caracteristic prin $(r+2)^2 = r^2 + 4r + 4$, găsim că celelalte şase rădăcini caracteristice sunt rădăcinile ecuaţiei

$$r^6 - 4r^5 + 10r^4 - 8r^3 + 17r^2 - 4r + 8 = 0. \tag{1.84}$$

Studiem dacă ecuaţia (1.84) are rădăcini complexe pur imaginare. Impunând ca $i\beta$ să satisfacă (1.84), după egalarea cu zero a părţilor reale şi imaginare, deducem că β trebuie să fie rădăcina reală comună a ecuaţiilor

$$\beta^6 - 10\beta^4 + 17\beta^2 - 8 = 0, \qquad \beta^5 - 2\beta^3 + \beta = 0.$$

Aceste ecuaţii au rădăcinile duble comune $\beta = -1$ şi $\beta = 1$, ceea ce arată că $r_2 = i$ şi $r_3 = -i$ sunt rădăcini caracteristice duble.

Împărţind polinomul din membrul întâi al ecuaţiei (1.84) la polinomul $r^4 + 2r^2 + 1$ se găseşte câtul $r^2 - 4r + 8$. Prin urmare,

$$r^6 - 4r^5 + 10r^4 - 8r^3 + 17r^2 - 4r + 8 = (r^4 + 2r^2 + 1)(r^2 - 4r + 8). \tag{1.85}$$

Ultimele două rădăcini caracteristice se determină anulând cel de al doilea factor din membrul doi al relaţiei (1.85). Se găseşte că $r_4 = 2 + 2i$ şi $r_5 = 2 - 2i$ sunt rădăcini caracteristice simple.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este

$$\begin{aligned} y &= (C_1 + C_2x)e^{-2x} + (C_3 + C_4x)\cos x + (C_5 + C_6x)\sin x + \\ &+ (C_7 \cos 2x + C_8 \sin 2x)e^{2x}, \end{aligned}$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_8$ sunt constante reale arbitrare. ■

1.5 Ecuaţii diferenţiale liniare neomogene cu coeficienţi constanţi

Să considerăm ecuaţia diferenţială neomogenă

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \tag{1.86}$$

în care coeficienţii $a_0, a_1, \dots, a_n$ sunt numere reale date, $a_0 \neq 0$, iar f este o funcţie reală continuă cunoscută.

Deoarece în paragraful precedent s–a prezentat o metodă de integrare a ecuaţiei omogene asociată ecuaţiei (1.86), determinarea tuturor soluţiilor ecuaţiei diferenţiale (1.86) nu întâmpină dificultăţi.

În cazul general, când $f(x)$ este o funcţie continuă oarecare, pentru a determina o soluţie particulară a ecuaţiei (1.86) se aplică metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

Soluţia generală a ecuaţiei (1.86) este atunci suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate şi acea soluţie particulară. Determinarea unei soluţii particulare presupune n cuadraturi.

Există însă situaţii când o soluţie particulară se poate determina numai prin operaţii algebrice.

Prima dintre ele este atunci când membrul al doilea din (1.86) are forma unui *cvasipolinom*, adică forma

$$f(x) = e^{\gamma x} P(x) \tag{1.87}$$

unde P este un polinom algebric şi γ un număr real. Să presupunem că γ este o rădăcină de multiplicitate s a ecuaţiei caracteristice $L(r) = 0$ ($s = 0$ dacă γ nu este rădăcină caracteristică).

În acest caz, se caută o soluţie particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei (1.86) sub forma

$$y_p(x) = x^s\, e^{\gamma x}\, Q(x), \tag{1.88}$$

unde Q este un polinom cu coeficienţi nedeterminaţi de acelaşi grad cu P.

Scriind că $L(y_p)(x) \equiv f(x)$, unde $f(x)$ are expresia (1.87), simplificând apoi prin $e^{\gamma x}$ şi identificând puterile lui x, obţinem coeficienţii necunoscuţi ai polinomului din (1.88).

Exerciţiul 1.5.1 *Să se integreze ecuaţia diferenţială liniară neomogenă de ordinul al doilea*

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Soluţie. Termenul liber al acestei ecuaţii diferenţiale este de forma (1.87).

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei omogene asociate are rădăcinile $r_1 = 1$ şi $r_2 = 2$, astfel că soluţia generală a acesteia, adică a ecuaţiei diferenţiale $y'' - 3y' + 2y = 0$, este $y_o = C_1\, e^x + C_2\, e^{2x}$. Pentru că $r = 3$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice (deci $s = 0$), soluţia particulară $y_p(x)$ a ecuaţiei date o căutăm în forma

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Calculăm $L(y_p(x))$, egalăm cu $(x^2 + x)e^{3x}$, simplificăm prin e^{3x} şi dacă identificăm puterile lui x din cei doi membri, obţinem sistemul

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 6A + 2B = 1, \\ 2A + 3B + 2C = 0, \end{cases}$$

care are soluţia $A = 1/2,\ B = -1,\ C = 1$. Prin urmare, $y_p(x) = ((1/2)x^2 - x + 1)e^{3x}$. Soluţia generală va fi suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate şi soluţia particulară determinată mai sus.

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{2x} + (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}.$$

Având soluţia generală, putem aborda orice problemă Cauchy a ecuaţiei diferenţiale date. ∎

O a doua situaţie când se poate determina o soluţie particulară fără cuadraturi (integrări) este aceea în care membrul drept din (1.86) are forma

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x), \tag{1.89}$$

în care P_1 şi P_2 sunt polinoame cu coeficienţi reali, în general de grade diferite. În această situaţie, soluţia particulară trebuie căutată în forma

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x), \tag{1.90}$$

unde Q_1 şi Q_2 sunt polinoame de grad egal cu gradul maxim al polinoamelor P_1 şi P_2, iar s este ordinul de multiplicitate al lui $\gamma = \alpha + i\beta$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice.

Exerciţiul 1.5.2 *Să se integreze ecuaţia diferenţială*

$$y'' + y' - 2y = (-3x^2 - 23x + 12)\cos 3x + (11x^2 - 5x - 5)\sin 3x.$$

Soluţie. Se determină întâi soluţia generală a ecuaţiei omogene asociată $y'' + y' - 2y = 0$ şi se găseşte

$$y_o(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}.$$

Deoarece $K(3i) \neq 0$, căutăm soluţia particulară a ecuaţiei neomogene de forma

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 3x.$$

Din $L(y_p(x)) \equiv (-3x^2 - 23x + 12)\cos 3x + (11x^2 - 5x - 5)\sin 3x$, deducem

$$A = 0,\quad B = 1,\quad C = -1,\quad D = -1,\quad E = 0,\quad F = 0.$$

Deci $y_p(x) = (x - 1)\cos 3x - x^2\sin 3x$, iar soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale neomogenă dată în enunţ este

$$y = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x} + (x - 1)\cos 3x - x^2\sin 3x$$

şi are această expresie pentru că este suma lui y_o cu y_p. ∎

Exerciţiul 1.5.3 *Să se determine acea soluţie a ecuaţiei diferenţiale*

$$y'' - 2y' + 2y = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$$

care satisface condiţiile iniţiale $y(0) = 0$ *şi* $y'(0) = 1$.

Soluţie. Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei omogene asociate are rădăcinile complex conjugate $r_1 = 1 + i$ şi $r_2 = 1 - i$. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate $y'' - 2y' + 2y = 0$ va fi

$$y_o = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^x.$$

Având în vedere că $L(1 + i) = 0$, vom determina o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene date de forma

$$y_p(x) = x\Big[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\Big]e^x.$$

Înlocuind pe $y_p(x)$, $y_p'(x)$ şi $y_p''(x)$ în ecuaţia $L(y_p) = e^x(2\cos x - 4x\sin x)$ şi identificând mai întâi factorii lui $\cos x$ şi $\sin x$ din cei doi membri şi apoi polinoamele factori, se obţine un sistem pentru determinarea coeficienţilor A, B, C, D. Se găseşte:

$$A = 1; \qquad B = 0; \qquad C = 0; \qquad D = 0,$$

aşa că $y_p(x) = x^2\cos x$, iar soluţia generală a ecuaţiei date va fi

$$y = (C_1\cos x + C_2\sin x)e^x + x^2\cos x$$

şi este astfel pentru că este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate şi o soluţie particulară. ∎

Exerciţiul 1.5.4 *Să se determine soluţia generală a fiecărei ecuaţii de mai jos şi, acolo unde sunt indicate condiţii iniţiale, să se rezolve problema lui Cauchy corespunzătoare:*

1. $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$; $\qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 9$;

2. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$; $\qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;

3. $y'' - 9y' + 20y = x^2e^{4x}$; $\qquad y(0) = -1, \quad y'(0) = -3$;

4. $y'' + 6y' + 8y = 2\sin x + 3\cos x$;

5. $x'' - 3x' + 2x = (3t - 2)\cdot e^t$,

6. $y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = x^3$.

Soluţie. Determinăm mai întâi câte un sistem fundamental de soluţii pentru fiecare din ecuaţiile diferenţiale omogene asociate

$$\textbf{1}.\ \ y'' - 4y' + 3y = 0; \quad \textbf{2}.\ \ y'' - 8y' + 16y = 0;$$

$$\textbf{3}.\ \ y'' - 9y' + 20y = 0; \quad \textbf{4}.\ \ y'' + 6y' + 8y = 0;$$

$$\textbf{5}.\ \ x'' - 3x' + 2x = 0; \quad \textbf{6}.\ \ y^{(4)} - 2y^{(3)} + y'' = 0.$$

Ecuaţia caracteristică a fiecărei din aceste ecuaţii diferenţiale, rădăcinile caracteristice ale sale şi soluţia generală corespunzătoare sunt:

1. $r^2 - 4r + 3 = 0;\quad r_1 = 1, r_2 = 3;\quad y_o = C_1 e^x + C_2 e^{3x};$

2. $r^2 - 8r + 16 = 0;\quad r_1 = 4, r_2 = 4;\quad y_o = (C_1 + C_2 x)e^{4x};$

3. $r^2 - 9r + 20 = 0;\quad r_1 = 4, r_2 = 5;\quad y_o = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x};$

4. $r^2 + 6r + 8 = 0;\quad r_1 = -2, r_2 = -4;\quad y_o = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x};$

5. $r^2 - 3r + 2 = 0;\quad r_1 = 1, r_2 = 2;\quad x_o = C_1 e^t + C_2 e^{2t};$

6. $r^4 - 2r^3 + r^2 = 0;\quad r_1 = 0, r_2 = 1;\quad y_o = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x)e^x.$

Pentru fiecare din ecuaţiile neomogene date în enunţ, determinăm o soluţie particulară $y_p(x)$ de forma membrului drept, şi anume

1. $y_p(x) = Ae^{5x}$; **2**. $y_p(x) = Ax^2 e^{4x}$;

3. $y_p(x) = x(Ax^2 + Bx + C)e^{4x}$; **4**. $y_p(x) = A\sin x + B\cos x$;

5. $x_p(t) = t(At + B)e^t$; **6**. $y_p = x^2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$.

Impunând acestor funcţii să verifice ecuaţiile diferenţiale iniţiale corespunzătoare, se determină constantele care intervin după cum urmează:

$$\textbf{1}.\ A = \frac{1}{8};\ \textbf{2}.\ A = \frac{1}{2};\ \textbf{3}.\ A = -\frac{1}{3}, B = -1, C = -2;\ \textbf{4}.\ A = \frac{32}{85}, B = \frac{9}{85};$$

$$\textbf{5}.\ A = -\frac{3}{2}, B = -1;\ \textbf{6}.\ A = \frac{1}{20}, B = \frac{1}{2}, C = 3, D = 12.$$

Se ştie că soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale neomogene este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Folosind acest rezultat, din cele deduse mai sus, rezultă corespunzător soluţiile:

1. $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{8} e^{5x}$;

2. $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{4x} + \frac{1}{2} x^2 e^{4x}$;

3. $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} - \frac{1}{3} x(x^2 + 3x + 6) e^{4x}$;

4. $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x} + \frac{32}{85} \sin x + \frac{9}{85} \cos x$;

5. $x(t) = x_0(t) + x_p(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2} t(3t + 2) e^t$;

6. $y(x) = C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2$.

Pentru a rezolva problema lui Cauchy a fiecăreia din primele trei ecuaţii diferenţiale, determinăm constantele C_1 şi C_2 impunând condiţiile iniţiale corespunzătoare.

Soluţiile acestor probleme sunt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}.\quad y(x) &= \frac{1}{8} e^x + \frac{11}{4} e^{3x} + \frac{1}{8} e^{5x};\\
\mathbf{2}.\quad y(x) &= \frac{1}{2} x(x + 2) e^{4x};\\
\mathbf{3}.\quad y(x) &= -4e^{4x} + 3e^{5x} - \frac{1}{3} x(x^2 + 3x + 6) e^{4x}.
\end{aligned}$$

Pentru a rezolva o problemă de tip Cauchy pentru ultima ecuaţie diferenţială trebuiesc specificate patru condiţii iniţiale.

Presupunând că $x_0 = 0$ şi

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 27, \quad y'''(0) = 22,$$

găsim pentru constante valorile $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 1$.

Soluţia problemei lui Cauchy corespunzătoare datelor iniţiale specificate este $y(x) = (x + 1) e^x + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{2} + 3x^3 + 12x^2$. ■

Capitolul 2

Sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi

2.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi neliniare sub formă normală

Forma generală a unui sistem de n ecuaţii diferenţiale ordinare, de ordinul întâi, sub formă normală este

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots & \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{2.1}$$

Necunoscutele sistemului (2.1) sunt funcţiile reale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ care depind de variabila reală x şi sunt definite pe un intervalul real închis I. Funcţiile date f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sunt continue împreună cu derivatele lor parţiale de ordinul întâi în domeniul închis $I \times D$, unde $D \subset \mathbb{R}^n$.

Dacă se introduc funcţiile vectoriale

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n), \quad \mathbf{y}' = (y_1', y_2', \ldots, y_n'),$$

atunci sistemul (2.1) se scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}).$$

2.1.1 Legătura cu ecuaţiile diferenţiale de ordinul n

Teorema 2.1.1 *Un sistem de forma* (2.1) *este echivalent cu o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul* n *sub formă normală.*

Demonstraţie. Fie dată o ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul n sub formă normală

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{2.2}$$

Dacă introducem funcţiile necunoscute

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \cdots, \quad y_n = y^{(n-1)} \tag{2.3}$$

şi ţinem cont de ecuaţia (2.2), obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi sub formă normală

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ \cdots, & \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{2.4}$$

Din modul cum a fost obţinut sistemul (2.4) se vede că dacă y este o soluţie a ecuaţiei (2.2), atunci $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este o soluţie a sistemului (2.4) şi reciproc, dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este o soluţie a sistemului (2.4), iar funcţiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt cele din (2.3), atunci $y_1 = y$ este o soluţie a ecuaţiei (2.2).

Reciproc, să arătăm cum studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale de forma (2.1) se reduce la studiul unei ecuaţii diferenţiale de forma (2.2). Pentru simplificarea calculelor vom considera cazul $n = 3$. Fie deci sistemul diferenţial

$$\begin{cases} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, y_3), \\ y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, y_3). \end{cases} \tag{2.5}$$

Derivând prima ecuaţie din (2.5) în raport cu x, obţinem

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot y_3'. \tag{2.6}$$

Înlocuind în (2.6) pe y_1', y_2', y_3' cu expresiile lor (2.5), găsim

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, y_3), \tag{2.7}$$

unde

$$F_2(x, y_1, y_2, y_3) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} \cdot f_3.$$

Dacă derivăm acum ecuaţia (2.7) în raport cu x şi ţinem cont de(2.5), obţinem

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, y_3), \qquad (2.8)$$

unde $F_3(x, y_1, y_2, y_3) = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot f_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot f_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial y_3} \cdot f_3$.

Din prima ecuaţie a sistemului (2.5) şi din ecuaţia (2.7) se pot afla, în general, y_2 şi y_3 funcţie de x, y_1, y_1' şi y_1'', care înlocuite în (2.8), conduce la ecuaţia diferenţială de ordinul trei sub formă normală

$$y_1''' = F(x, y_1, y_1', y_1''),$$

ceea ce trebuia de demonstrat. ∎

Exerciţiul 2.1.1 *Să se afle soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y. \end{cases}$$

Soluţie. Dacă derivăm prima ecuaţie, obţinem $y'' = z'$. Folosind a doua ecuaţie, găsim $y'' + y = 0$. Această ecuaţie este o ecuaţie diferenţială liniară de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi omogenă, care are ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \pm i$.

Ca atare, un sistem fundamental de soluţii pentru ecuaţia diferenţială $y'' + y = 0$ este format din soluţiile $y_1 = \cos x$ şi $y_2 = \sin x$.

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale $y'' + y = 0$ este o combinaţie liniară de cele două soluţii fundamentale

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Din prima ecuaţie a sistemului găsim şi expresia lui z,

$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

şi astfel am obţinut soluţia generală a sistemului dat. ∎

Exerciţiul 2.1.2 *Să se reducă sistemul*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y, \\ \dfrac{dy}{dt} &= z, \\ \dfrac{dz}{dt} &= x \end{cases} \tag{2.9}$$

la o ecuaţie de ordin superior şi să se găsească apoi soluţia sa generală.

Soluţie. Procedând ca în reciproca Teoremei 2.1.1 se ajunge la ecuaţia diferenţială liniară de ordinul trei cu coeficienţi constanţi, omogenă

$$x''' - x = 0 \tag{2.10}$$

ce are ecuaţia caracteristică $r^3 - 1 = 0$ şi rădăcinile caracteristice

$$r_1 = 1, \quad r_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Acestor rădăcini caracteristice le corespund soluţiile fundamentale

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cos \tfrac{t\sqrt{3}}{2}, \quad x_3(t) = e^{-\frac{t}{2}} \sin \tfrac{t\sqrt{3}}{2}.$$

Astfel, soluţia generală a ecuaţiei (2.10) este

$$x \;=\; C_1\, e^t + e^{-\frac{t}{2}}\Big(C_2 \cos \tfrac{t\sqrt{3}}{2} + C_3 \sin \tfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big). \tag{2.11}$$

Folosind sistemul, constatăm că necunoscuta y se obţine derivând pe x, iar funcţia z se obţine derivându–l pe y. Se găseşte

$$\begin{cases} y = C_1 e^t - \dfrac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\Big[(C_2 - C_3\sqrt{3}) \cos \dfrac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 + C_2\sqrt{3}) \sin \dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big], \\ z = C_1 e^t - \dfrac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\Big[(C_2 + C_3\sqrt{3}) \cos \dfrac{t\sqrt{3}}{2} + (C_3 - C_2\sqrt{3}) \sin \dfrac{t\sqrt{3}}{2}\Big]. \end{cases} \tag{2.12}$$

Soluţia generală a sistemului (2.9) este dată de (2.11) şi (2.12). ■

Exerciţiul 2.1.3 *Folosind metoda eliminării, să se determine ecuaţia diferenţială liniară de ordinul trei cu care este echivalent sistemul de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi de mai jos şi, folosind rezulatatul stabilit, să se integreze sistemul*

$$\begin{cases} y_1' + 9y_1 + 12y_2 + 5y_3 &= 0, \\ y_2' - 5y_1 - 6y_2 - 3y_3 &= 0, \\ y_3' - y_1 - 4y_2 - y_3 &= 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Soluţie. Derivăm prima egalitate şi în rezultatul obţinut

$$y_1'' = -9y_1' - 12y_2' - 5y_3'$$

înlocuim pe y_1', y_2' şi y_3' cu valorile date în ecuaţiile sistemului. Găsim

$$y_1'' = 16y_1 + 16y_2 + 4y_3. \tag{2.14}$$

Procedând similar cu egalitatea (2.14), deducem

$$y_1''' = -60y_1 - 80y_2 - 28y_3. \tag{2.15}$$

Considerăm sistemul format din prima ecuaţie a sistemului iniţial (2.13) şi ecuaţia (2.14)

$$\begin{cases} 12y_2 + 5y_3 &= -9y_1 - y_1', \\ 16y_2 + 4y_3 &= -16y_1 + y_1'', \end{cases} \tag{2.16}$$

în care necunoscutele sunt y_2 şi y_3.

Rezolvând sistemul algebric (2.16), găsim

$$\begin{cases} y_2 &= -\dfrac{11}{8}y_1 + \dfrac{1}{8}y_1' + \dfrac{5}{32}y_1", \\ y_3 &= \dfrac{3}{2}y_1 - \dfrac{1}{2}y_1' - \dfrac{3}{8}y_1''. \end{cases} \tag{2.17}$$

Valorile lui y_2 şi y_3 determinate în (2.17) le înlocuim în ecuaţia (2.15) şi astfel găsim ecuaţia diferenţială liniară de ordin trei omogenă, cu coeficienţi constanţi

$$y_1''' + 2y_1'' - 4y_1' - 8y_1 = 0, \tag{2.18}$$

a cărei funcţie necunoscută este y_1.

Ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale (2.18) este

$$r^3 + 2r^2 - 4r - 8 = 0,$$

rădăcinile sale fiind $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = -2$. Rădăcinii caracteristice simple $r_1 = 2$ îi corespunde soluţia $y_1^{(1)}(x) = e^{2x}$, iar celei duble îi corespund două soluţii, şi anume

$$y_1^{(2)} = e^{-2x}, \qquad y_1^{(3)} = x\,e^{-2x}.$$

Funcţiile astfel determinate formează un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei diferenţiale (2.18), iar soluţia sa generală este

$$y_1(x) = C_1y_1^{(1)}(x) + C_2y_1^{(2)}(x) + C_3y_1^{(3)}(x),$$

unde C_1, C_2 şi C_3 sunt constante reale arbitrare.

Prin urmare, expresia lui y_1 este

$$y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^{-2x}. \tag{2.19}$$

Pentru determinarea funcţiilor necunoscute y_2 şi y_3 folosim expresiile (2.17), unde înlocuim pe y_1, y_1' şi y_1" aşa cum rezultăă din (2.19). Găsim

$$\begin{cases} y_2 &= -\dfrac{1}{2}C_1 e^{2x} - (C_2 + \dfrac{1}{2}C_3 + C_3 x)e^{-2x}, \\ y_3 &= -C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3 x)e^{-2x}. \end{cases}$$

Prin urmare, soluţia generală a sistemului (2.13) este

$$\begin{cases} y_1 &= C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 x)e^{-2x}, \\ y_2 &= -\dfrac{1}{2}C_1 e^{2x} - (C_2 + \dfrac{1}{2}C_3 + C_3 x)e^{-2x}, \\ y_3 &= -C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3 + C_3 x)e^{-2x}. \end{cases}$$

■

Exerciţiul 2.1.4 *Să se integreze sistemul diferenţial liniar de ordinul întâi, omogen şi cu coefcienţi constanţi*

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2 + 2y_3, \\ y_2' &= -y_1 \qquad - 2y_3, \\ y_3' &= \ \ y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases} \tag{2.20}$$

Soluţie. Aplicând demonstraţia reciprocei Teoremei 2.1.1, suntem conduşi la ecuaţia

$$y_1'' = 5y_1 + 4y_2 + 6y_3. \tag{2.21}$$

Derivând această egalitate şi înlocuind derivatele din membrul al doilea, obţinem

$$y_1''' = 12y_1 + 11y_2 + 14y_3. \tag{2.22}$$

Cu prima ecuaţie a sistemului diferenţial (2.20) şi ecuaţia (2.21) alcătuim sistemul

$$\begin{cases} y_2 + 2y_3 &= y_1' - 2y_1, \\ 4y_2 + 6y_3 &= y_1" - 5y_1, \end{cases}$$

din care se determină funcţiile necunoscute y_2 şi y_3 în funcţie de y_1 şi derivatele y_1', y_1"

$$\begin{cases} y_2 &= \quad y_1'' - 3y_1' + y_1, \\ y_3 &= -\dfrac{1}{2}y_1'' + 2y_1' - \dfrac{3}{2}y_1. \end{cases} \tag{2.23}$$

Introducerea expresiilor lui y_2 şi y_3 din (2.23) în egalitatea (2.22) conduce la ecuaţia diferenţială liniară de ordinul al treilea, omogenă şi cu coeficienţi constanţi

$$y_1''' - 4y_1'' + 5y_1' - 2y_1 = 0, \tag{2.24}$$

a cărei ecuaţie caracteristică,

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0,$$

are rădăcina dublă $r_1 = r_2 = 1$ şi rădăcina simplă $r_3 = 2$. Acestor rădăcini caracteristice le corespund sistemul fundamental de soluţii:

$$y_1^{(1)} = e^x; \quad y_1^{(2)} = x\,e^x; \quad y_1^{(3)} = e^{2x}. \tag{2.25}$$

Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale (2.24) este combinaţia liniară de soluţiile sistemului fundamental de soluţii (2.25)

$$y_1 = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{2x}. \tag{2.26}$$

Celelalte două necunoscute ale sistemului (2.20) se determină din (2.23)

$$\begin{cases} y_2 &= (-C_1 - C_2 - C_2x)e^x - C_3e^{2x}, \\ y_3 &= C_2e^x + \dfrac{1}{2}C_3e^{2x}. \end{cases} \tag{2.27}$$

Prin urmare, soluţia generală a sistemului (2.20) este reprezentată de funcţiile date în (2.26) şi (2.27). ■

Observaţia 2.1.1 *Rezultatele stabilite pot fi prelucrate întrun alt mod din care rezultă o nouă metodă de rezolvare a sistemelor diferenţiale de tipul* (2.20) *şi anume* **metoda valorilor şi vectorilor proprii**.

2.1.2 Integrale prime. Soluţie generală

În ipotezele menţionate pentru funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$, se poate demonstra că există o soluţie unică a sistemului (2.1) care, pentru $x = x_0$ ia valorile prescrise

$$y_i(x_0) = y_i^{(0)}, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2.28}$$

unde $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ este un punct arbitrar din interiorul mulţimi $I \times D$.

Fie această soluţie

$$\begin{cases} y_1 &= \varphi_1(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}),\\ y_2 &= \varphi_2(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}),\\ \ldots, & \\ y_n &= \varphi_n(x; x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}). \end{cases} \tag{2.29}$$

Această formă a soluţiei pune în evidenţă dependenţa ei de *datele iniţiale* $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$.

Geometric, (2.29) reprezintă ecuaţiile parametrice ale unei curbe Γ în spaţiul n dimensional $I\!R^n$, care trece prin punctul $M_0(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$. Curba Γ se numeşte *curbă integrală* sau *traiectorie* a sistemului (2.1). Punctul M_0 se numeşte *punct iniţial*.

Fie acum un punct oarecare $M(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Gamma$, diferit de M_0, corespunzător valorii $x \in (a, b)$. Valorile $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ şi $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sunt legate prin relaţiile (2.29).

Dacă schimbăm rolurile punctelor M_0 şi M, deci M devine punct iniţial, atunci, în baza unicităţii soluţiei, curba integrală ce trece prin M va trece şi prin M_0 şi avem

$$\begin{cases} y_1^{(0)} &= \varphi_1(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ y_2^{(0)} &= \varphi_2(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ \ldots, & \\ y_n^{(0)} &= \varphi_n(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{2.30}$$

Relaţiile (2.30) arată că sistemul (2.29) s–a putut rezolva unic în raport cu valorile iniţiale $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$, iar funcţiile din membrul drept admit derivate parţiale continue în raport cu $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Cum datele iniţiale se pot alege arbitrar în interiorul lui D şi notându–le în (2.30) cu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (constante arbitrare), obţinem ansamblul de relaţii

$$\begin{cases} \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = & C_1, \\ \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = & C_2, \\ \ldots, & & \\ \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) & = & C_n, \end{cases} \tag{2.31}$$

unde $\psi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \varphi_i(x_0; x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ şi x_0 dat.

Dar, relaţiile (2.31) pot fi rezolvate în mod unic în raport cu variabilele y_1, $y_2, \ldots,$ y_n şi deci

$$\begin{cases} y_1 & = & \overline{\varphi}_1(x; C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 & = & \overline{\varphi}_2(x; C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ \ldots, & & \\ y_n & = & \overline{\varphi}_n(x; C_1, C_2, \ldots, C_n). \end{cases} \tag{2.32}$$

Relaţiile (2.31) reprezintă *soluţia generală sub formă implicită* a sistemului (2.1). În loc de soluţie generală se utilizează şi termenul de *ansamblu de integrale prime* sau *integrală generală* a sistemului. Oricare din ecuaţiile (2.31) se numeşte *integrală primă* a sistemului (2.1).

Soluţia generală a sistemului (2.1), sub formă explicită, este dată de relaţiile (2.32).

Din modul cum au fost deduse relaţiile (2.31), constatăm că o funcţie $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este integrală primă numai dacă $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ verifică sistemul (2.1).

Astfel, putem da două definiţii echivalente pentru integrala primă a unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi.

Definiţia 2.1.1 *Se numeşte* **integrală primă** *a sistemului de ecuaţii diferenţiale* (2.1), *orice relaţie obţinută rezolvând în raport cu constantele arbitrare soluţia lui generală* (2.32).

Aşadar, oricare din relaţiile (2.31) este o integrală primă a sistemului (2.1).

În baza existenţei şi unicităţii unei soluţii a sistemului (2.1) care trece printr–un punct dat din interiorul mulţimi $I \times D$, rezolvarea în raport cu constantele arbitrare a relaţiilor (2.32) este întotdeauna posibilă.

Definiţia de mai sus poate fi dată numai după ce se cunoaşte soluţia generală a sistemului.

Definiţia 2.1.2 *Se spune că funcţia* $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) : [a, b] \times D \to I\!R$ *este o* **integrală primă** *a sistemului* (2.1) *pe o submulţime deschisă* Ω *a mulţimii* $[a, b] \times D$, *dacă* ψ *este de clasă* $C^1(\Omega)$, *nu este identic constantă dar*

$$\psi(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \psi_n(x)) \equiv \text{ constant},$$

de–a lungul oricărei traiectorii $y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$ *a sistemului* (2.1).

Observaţia 2.1.2 *Cu Definiţia* 2.1.2 *putem spune că un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi admite o infinitate de integrale prime deoarece funcţia*

$$\Phi[\psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)],$$

unde Φ *este o funcţie arbitrară de integralele prime* ψ_i *este la rândul ei o integrală primă a sistemului* (2.1).

Teorema 2.1.2 *Rezolvarea sistemului* (2.1) *este echivalentă cu obţinerea a* n *integrale prime independente.*

Demonstraţie. Fie n integrale prime (2.31) independente funcţional, deci pentru care determinantul funcţional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0.$$

Aplicând teorema de existenţă şi unicitate a sistemelor de funcţii definite implicit, din (2.31) deducem relaţiile (2.32) care constituie soluţia generală a sistemului. ■

Observaţia 2.1.3 *Cunoaşterea unei singure integrale prime a sistemului* (2.1) *reduce rezolvarea sistemului la* $n-1$ *ecuaţii cu* $n-1$ *funcţii necunoscute.*

Într-adevăr, din $\psi_1(x; y_1, y_2, \ldots, y_n) = C$ se poate exprima una din funcţiile necunoscute, de exemplu y_n, în funcţie de $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ şi C

$$y_n = (x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, C).$$

Înlocuindu–l în primele $n - 1$ ecuaţii ale sistemului (2.1) obţinem un sistem de $n - 1$ ecuaţii diferenţiale cu $n - 1$ funcţii necunoscute. ■

Observaţia 2.1.4 *Sistemul* (2.1) *este echivalent cu sistemul*

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \cdots = \frac{dy_n}{f_n}. \tag{2.33}$$

Acest sistem este echivalent la rându–i cu cel obţinut prin înmulţirea rapoartelor cu un acelaşi factor, care poate fi funcţie de $n+1$ variabile, şi anume x, y_1, y_2, $\ldots$, y_n.

În cele ce urmează considerăm că numărul variabilelor este n şi că sunt notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar una dintre ele este dependentă de celelalte $n-1$, ceea ce înseamnă că putem scrie sistemul de ecuaţii diferenţiale în forma

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})}, \tag{2.34}$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, care se numeşte *forma simetrică* a sistemului de $n-1$ ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu $n-1$ necunoscute.

2.2 Sisteme diferenţiale sub formă simetrică

Să considerăm sistemul simetric (2.34) în care funcţiile X_i sunt continue şi au derivate parţiale continue în raport cu toate variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Conform paragrafului precedent, soluţia generală a sistemului simetric (2.34) este ansamblul

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & C_2, \\ \cdots, & & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) & = & C_{n-1}, \end{cases} \tag{2.35}$$

format din $n-1$ integrale prime oarecare independente funcţional, în sensul că rangul matricei jacobiene al funcţiilor $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ este egal cu $n-1$ în interiorul mulţimii de existenţă a funcţiilor $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Dacă dorim să trecem un sistem de la forma simetrică (2.34) la forma normală, este suficient să alegem una din variabile, de exemplu x_n, ca vari-

abilă independentă. În acest fel, din (2.34) avem

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dx_n} = \dfrac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \\ \dfrac{dx_2}{dx_n} = \dfrac{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \\ \cdots, \\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n} = \dfrac{X_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \end{cases} \tag{2.36}$$

Observaţia 2.2.1 *Pentru valorile iniţiale* $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$, *valoarea funcţiei* X_n *nu trebuie să se anuleze. Dacă acest lucru nu este posibil, alegem altă variabilă independentă.*

Teorema 2.2.1 *Relaţia*

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \tag{2.37}$$

este o integrală primă a sistemului simetric (2.34) *dacă şi numai dacă , de–a lungul unei curbe integrale a sistemului* (2.36), *avem*

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0, \tag{2.38}$$

unde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Demonstraţie. Dacă funcţia ψ din (2.37) este o integrală primă a sistemului (2.36) atunci, de–a lungul unei curbe integrale a sistemului (2.36), $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ are o valoare constantă, deci diferenţiala ei totală, de–a lungul unei curbe integrale este nulă şi deci

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \cdots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \cdot dx_n = 0. \tag{2.39}$$

Deoarece de–a lungul unei curbe integrale diferenţialele dx_i sunt proporţionale cu valorile funcţiilor X_i (vezi (2.34)), avem (2.38).

Reciproc, din (2.38) rezultă (2.39) şi deci $d\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ de–a lungul unei curbe integrale, ceea ce este echivalent cu $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv$ const. pentru orice soluţie a sistemului (2.36).

Definiţia 2.1.2 spune că ψ este o integrală primă a sistemului (2.36) sau a sistemului simetric (2.34). ■

Observaţia 2.2.2 *Singurele funcţii reale de n variabile reale care verifică relaţia* (2.38) *sunt integralele prime ale sistemului* (2.34).

Din punct de vedere geometric, soluţia generală (2.35) reprezintă o familie de curbe obţinută prin intersecţia suprafeţelor $\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_i$, $i = \overline{1, n-1}$. Această familie de curbe este inclusă în intersecţia domeniilor de definiţie ale funcţiilor $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ şi depinde de $n-1$ parametri $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$.

Aducerea unui sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi la forma simetrică este indicată pentru aflarea integralelor prime şi, în consecinţă, pentru aflarea soluţiei sale generale.

Exerciţiul 2.2.1 *Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale sub formă normală*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{(z-y)^2}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{y}{(z-y)^2}. \end{cases}$$

Soluţie. Forma simetrică a acestui sistem este

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Căutăm două combinaţii integrabile care să poată furniza cele două integrale prime independente.

O integrală primă se obţine din ultimele două rapoarte scrise în forma $ydy - zdz = 0$ care implică $d(y^2 - z^2) = 0$ şi deci $y^2 - z^2 = C_1$ este prima integrală primă (o familie uniparametrică de cilindri hiperbolici cu generatoarele paralele cu axa Ox).

Cea de a doua integrală primă se va obţine după ce aplicăm o proprietate a şirului de rapoarte egale. Astfel, avem

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dz - dy}{y - z}.$$

După simplificarea prin $y - z$ se obţine

$$dx + (y-z)d(y-z) = 0,$$

care conduce la cea de a doua integrală primă $2x + (y-z)^2 = C_2$ (familie uniparametrică de cuadrice).

Soluţia generală a sistemului, sub formă implicită, este dată de

$$\begin{cases} y^2 - z^2 & = & C_1, \\ 2x + (y-z)^2 & = & C_2 \end{cases}$$

şi reprezintă o familie dublu parametrică de curbe în spaţiu. ■

Exerciţiul 2.2.2 *Să se determine soluţia generală a sistemului simetric*

$$\frac{dx}{2y(2a-x)} = \frac{dy}{x^2+z^2-y^2-4ax} = \frac{dz}{-2yz}.$$

Soluţie. Egalitatea rapoartelor extreme ne conduce la combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{x-2a} = \frac{dz}{z},$$

care dă integrala primă

$$\frac{x-2a}{z} = C_1.$$

Dacă scriem această egalitate în forma $x - C_1 z - 2a = 0$, constatăm că integrala primă reprezintă o familie de plane paralele cu axa Oy.

O altă combinaţie integrabilă este

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{-y(x^2+y^2+z^2)} = \frac{dz}{-2yz} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} = \frac{dz}{z},$$

din care se obţine cea de a doua integrală primă

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{z} = C_2.$$

Dacă scriem rezultatul găsit în forma $x^2+y^2+z^2-C_2z=0$, constatăm că cea de a doua integrală primă reprezintă o familie de sfere cu centrele pe axa Oz, tangente în origine planului xOy.

Soluţia generală a sistemului simetric este ansamblul celor două integrale prime

$$\begin{cases} \dfrac{x-2a}{z} & = & C_1, \\ \dfrac{x^2+y^2+z^2}{z} & = & C_2. \end{cases}$$

Aşadar, curbele integrale sunt o familie dublu parametrică de cercuri în spaţiu. ■

Exerciţiul 2.2.3 *Să se găsească soluţia generală a sistemului simetric*

$$\frac{dx}{x(x+y)} = \frac{dy}{-y(x+y)} = \frac{dz}{(y-x)(2x+2y+z)}.$$

Soluţie. Din primele două rapoarte se obţine integrala primă

$$xy = C_1. \tag{2.40}$$

Vom căuta acum a doua combinaţie integrabilă. Efectuând raportul dintre suma numărătorilor şi suma numitorilor primelor două rapoarte, vom obţine un raport egal cu al treilea

$$\frac{dx+dy}{x^2-y^2} = \frac{-dz}{(x-y)(2x+2y+z)}.$$

După simplificarea cu $x-y$, se obţine

$$\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{-dz}{2x+2y+z}.$$

Efectuând diferenţa numărătorilor pe diferenţa numitorilor, obţinem un raport egal cu primul

$$\frac{dx+dy}{x+y} = -\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$$

din care deducem $\dfrac{dx+dy}{x+y} + \dfrac{dx+dy+dz}{x+y+z} = 0$. Integrând, obţinem

$$(x+y)(x+y+z) = C_2. \tag{2.41}$$

Soluţia generală a sistemului este ansamblul integralelor prime (2.40) şi (2.41). ■

2.3 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

În acest paragraf vom determina soluţiile sistemelor de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi. Forma generală a unui astfel de sistem este

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \cdots + a_{1n}(x)\, y_n = f_1(x), \\ y_2' + a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + \cdots + a_{2n}(x)\, y_n = f_2(x), \\ \cdots, \\ y_n' + a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \cdots + a_{nn}(x)\, y_n = f_n(x). \end{cases} \tag{2.42}$$

Presupunem că funcţiile a_{ij} şi f_i, $i, j = \overline{1,n}$, sunt continue pe intervalul $[a, b]$.

Dacă toţi $f_i(x) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, spunem că sistemul este *omogen*. În caz contrar sistemul este *neomogen*.

Sistemul (2.42) se poate scrie în forma vectorială

$$\mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \tag{2.43}$$

unde $\mathbf{y} : [a, b] \to I\!R^n$ este o funcţia vectorială necunoscută de variabilă reală, derivabilă, care în baza canonică din $I\!R^n$,

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

are coordonatele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \in I\!R^n \times I\!R^n \times \cdots \times I\!R^n = (I\!R^n)^n$, $A(x) \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ este o matrice cu elementele $a_{ij}(x)$, Y este matricea cu o singură coloană şi elemente coordonatele vectorului $\mathbf{y}$, adică $\mathbf{y} = \mathbf{e}Y$, iar $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : [a, b] \to I\!R^n$ este funcţie vectorială de o variabilă reală, cunoscută.

Definiţia 2.3.1 *Fie q un număr natural. Spunem că funţia vectorială de variabilă reală $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n) : [a, b] \to I\!R^n$ este de clasă $C^q([a, b])$ dacă funcţiile coordonate g_i, $i = \overline{1,n}$, sunt continue şi au derivate continue până la ordinul q inclusiv.*

Mulţimea $C^q([a, b])$ este spaţiu liniar real infinit dimensional. Pentru $C^{(0)}([a, b])$ vom folosi notaţia $C([a, b])$.

Definiţia 2.3.2 *Se numeşte* **soluţie** *a sistemului* (2.43) *funcţia vectorială de variabilă reală $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) : [a, b] \to I\!R^n$, de clasă $C^1([a, b])$, care satisface egalitatea*

$$\boldsymbol{\varphi}'(x) + \mathbf{e}(A(x)\Phi(x)) = \mathbf{f}(x), \quad (\forall)\, x \in [a, b],$$

unde Φ este matricea coloană cu elementele $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

2.3.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene

Fie sistemul (2.43) şi să notăm

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y). \tag{2.44}$$

Atunci sistemul (2.43), în forma omogenă, se scrie

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{0}, \tag{2.45}$$

unde $\mathbf{0}$ este funcţia vectorială identic nulă $\mathbf{0} : [a, b] \to I\!R^n$.

Teorema 2.3.1 *Aplicaţia vectorială* $\mathbf{L}$ *este un operator liniar definit pe spaţiul vectorial* $C^1([a,b])$ *şi cu valori în spaţiul vectorial* $C([a,b])$.

Demonstraţie. Prima parte a teoremei este evidentă dacă avem în vedere expresia (2.44) a operatorului $\mathbf{L}$ şi continuitatea funcţiilor a_{ij}.

Se vede apoi că operatorul $\mathbf{L}$ are proprietatea

$$\mathbf{L}(\alpha\boldsymbol{\varphi}+\beta\boldsymbol{\psi}) \;=\; \alpha\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi})+\beta\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi}), \tag{2.46}$$

oricare ar fi numerele α şi β, reale sau complexe, şi oricare ar fi funcţiile vectoriale de variabilă reală $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}\in C^1([a,b])$. ■

A integra sistemul liniar şi omogen (2.43) de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul întâi, cu coeficienţi variabili, înseamnă a găsi toate soluţiile lui. Observăm că dacă $\mathbf{y}\in C^1([a,b])$ este o soluţie a sistemului (2.45), atunci imaginea lui $\mathbf{y}$ prin operatorul $\mathbf{L}$ este elementul nul din $C([a,b])$. Prin urmare, mulţimea soluţiilor sistemului (2.45) coincide cu nucleul operatorului liniar $\mathbf{L}$, deci cu $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$.

Operatorul $\mathbf{L}$ fiind liniar, rezultă că $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este un spaţiu liniar, subspaţiu liniar al spaţiului liniar infinit dimensional $C([a,b])$.

Observaţia 2.3.1 *Dacă coeficienţii sistemului omogen* (2.45) *sunt funcţii reale, iar funcţia vectorială* $\boldsymbol{\varphi}+i\boldsymbol{\psi}$ *este o soluţie complexă a sistemului omogen* (2.45), *atunci funcţiile vectoriale de variabilă reală* $\boldsymbol{\varphi}$ *şi* $\boldsymbol{\psi}$ *sunt soluţii ale acestui sistem.*

Într-adevăr, din (2.46) rezultă

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi}+i\boldsymbol{\psi}) \;=\; \mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi})+i\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi}) \;=\; \mathbf{0},$$

deoarece $\boldsymbol{\varphi}+i\boldsymbol{\psi}$ este o soluţie a sistemului. Cum $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi})$ şi $\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi})$ sunt funcţii reale, deducem $\mathbf{L}(\boldsymbol{\varphi})=\mathbf{0}$ şi $\mathbf{L}(\boldsymbol{\psi})=\mathbf{0}$, adică funcţiile reale $\boldsymbol{\varphi}$ şi $\boldsymbol{\psi}$ sunt soluţii ale sistemului (2.45). ■

Să considerăm un punct oarecare $x_0\in[a,b]$ şi $y_1^{(0)},y_2^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}$ numere reale arbitrare.

Problema lui Cauchy pentru sistemul (2.45) constă în determinarea acelei soluţii $\mathbf{y}$ a sistemului care să verifice *condiţia lui Cauchy* (*condiţia iniţială*)

$$\mathbf{y}(x_0) \;=\; \mathbf{y}^{(0)}, \tag{2.47}$$

unde $\mathbf{y}^{(0)}=(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\ldots,y_n^{(0)})$.

Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei lui Cauchy pentru sistemul (2.45) pune în evidenţă un element $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ care satisface condiţia (2.47).

Teorema 2.3.2 *Mulţimea Ker***L** *este un spaţiu vectorial real de dimensiune* n.

Demonstraţie. Să considerăm mulţimea de soluţii ale sistemului (2.45)

$$\{\mathbf{y}^{(1)},\quad \mathbf{y}^{(2)},\quad \cdots, \mathbf{y}^{(n)}\} \tag{2.48}$$

care verifică următoarele condiţii ale lui Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(1)}(x_0) &= (1,0,\ldots,0),\\ \mathbf{y}^{(2)}(x_0) &= (1,0,\ldots,0),\\ \cdots, & \\ \mathbf{y}^{(n)}(x_0) &= (1,0,\ldots,0) \end{cases} \tag{2.49}$$

şi să arătăm că elementele acestei mulţimi, ca elemente ale spaţiului Ker **L**, sunt liniar independente. Vom demonstra prin reducere la absurd.

Presupunem deci că soluţiile sunt liniar dependente. Atunci există constantele C_1, C_2, ..., C_n, nu toate nule, astfel încât

$$C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}(x) \quad = \quad \mathbf{0}, \quad (\forall)\ x \in [a,b]. \tag{2.50}$$

În particular, (2.50) are loc pentru x_0 şi atunci, din (2.49) şi (2.50), avem

$$(C_1, C_2, \ldots, C_n) = \mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$$

din care deducem că toate constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt egale cu zero, ceea ce contrazice ipoteza.

Prin urmare, soluţiile (2.48) sunt *liniar independente.*

Să arătăm că soluţiile (2.48) constituie o bază în Ker **L**.

Pentru aceasta trebuie demonstrat că orice $\mathbf{y} \in$ Ker **L** se scrie ca o combinaţie liniară de elementele din (2.48), deci că există constantele reale $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încât

$$\mathbf{y} \quad = \quad C_1\mathbf{y}^{(1)} + C_2\mathbf{y}^{(2)} + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}, \tag{2.51}$$

sau

$$\mathbf{y}(x) = C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)(x)}, \quad (\forall)\ x \in [a,b]. \tag{2.52}$$

Scriind că (2.52) are loc şi pentru x_0 şi folosind (2.49), găsim

$$(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) = (C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

din care deducem că C_i din (2.51) sunt unic determinate şi

$$C_1 = y_1(x_0), \quad C_2 = y_2(x_0), \quad \dots, \quad C_n = y_n(x_0).$$

Prin urmare, soluţia considerată se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = y_1(x_0)\mathbf{y}^{(1)} + y_2(x_0)\mathbf{y}^{(2)} + \dots + y_n(x_0)\mathbf{y}^{(n)}.$$

Am dovedit astfel că orice $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathbf{L}$ se exprimă unic ca o combinaţie liniară a vectorilor (2.48), liniar independenţi în $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$, ceea ce arată că mulţimea (2.48) este o bază în $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$.

Prin urmare, $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este spaţiu vectorial real n dimensional. ■

Definiţia 2.3.3 *Vom spune că n soluţii $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ ale sistemului* (2.45) *formează un* **sistem fundamental de soluţii** *pe intervalul* $[a, b]$ *dacă ele sunt liniar independente în spaţiul liniar $n-$dimensional* $Ker\,\mathbf{L}$.

Cum dimensiunea lui $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este n rezultă că orice bază din $\operatorname{Ker}\mathbf{L}$ este un sistem fundamental de soluţii a sistemului (2.45).

2.3.2 Matrice fundamentală a unui sistem omogen

Definiţia 2.3.4 *Matricea pătratică $\Gamma(x)$, de ordinul n, ale cărei coloane sunt coordonatele vectorilor $\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \dots, \mathbf{y}^{(n)}(x)$ care formează un sistem fundamental de soluţii al sistemului liniar şi omogen de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, cu coeficienţi variabili* (2.45), *se numeşte* **matrice fundamentală** *a sistemului.*

Teorema 2.3.3 *Fie $\Gamma(x)$ o matrice fundamentală a sistemului* (2.45), $\Gamma'(x)$ *matricea formată din derivatele elementelor matricei $\Gamma(x)$ şi O matricea nulă pătratică de ordinul n. Atunci*

$$\Gamma'(x) \quad + \quad A(x)\Gamma(x) = O, \quad (\forall)\ x \in [a, b]. \tag{2.53}$$

Demonstraţie. Identitatea (2.53) este evidentă deoarece reprezintă scrierea matriceală a identităţilor $\mathbf{L}(\mathbf{y}^{(i)}) = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, \dots, n$ care exprimă faptul că funcţiile vectoriale $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(n)}$ sunt soluţii ale sistemului (2.45). ■

Matricea fundamentală a unui sistem omogen nu este unică.

Pentru aceasta să observăm că orice matrice $\widetilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)\cdot C$, unde C este o matrice pătratică constantă de ordinul n nesingulară, este tot o matrice fundamentală a sistemului (2.45).

Reciproc, orice matrice fundamentală $\widetilde{\Gamma}(x)$ a sistemului (2.45) se poate reprezenta sub forma

$$\widetilde{\Gamma}(x) \;=\; \Gamma(x)\cdot C, \qquad x\in[a,b], \tag{2.54}$$

unde C este o matrice constantă de tip $n\times n$ nesingulară. Această ultimă afirmaţie rezultă din

Corolarul 2.3.1 *Dacă* $\Gamma(x)$ *este o matrice fundamentală a sistemului de ecuaţii diferenţiale* (2.45), *atunci orice soluţie a acestuia se reprezintă sub forma*

$$\mathbf{y}(x) \;=\; \mathbf{e}(\Gamma(x)C), \qquad x\in[a,b], \tag{2.55}$$

unde C *este matricea coloană a coordonatelor unui vector constant din* $I\!R^n$.

Demonstraţie. Formula (2.55) rezultă din faptul că pe coloanele matricei $\Gamma(x)$ sunt coordonatele vectorilor unei baze din spaţiul soluţiilor sistemului (2.45). Astfel, (2.55) este exprimarea unui vector a unui spaţiu liniar n dimensional într–o bază . ■

2.3.3 Determinantul lui Wronski

Ca şi la studiul ecuaţiilor diferenţiale liniare, omogene de ordinul n, cu coeficienţi constanţi, se poate introduce şi aici *determinantul lui Wronski* sau *wronskianul* asociat unui sistem fundamental de soluţii, şi anume

$$W[\mathbf{y}^{(1)},\mathbf{y}^{(2)},\ldots,\mathbf{y}^{(n)}] \;=\; \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_2^{(n)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}. \tag{2.56}$$

Pentru valorile funcţiei introdusă în (2.56) se pot utiliza notaţiile $W(x)$ sau $W[\mathbf{y}^{(1)},\mathbf{y}^{(2)},\ldots,\mathbf{y}^{(n)}](x)$.

Observaţia 2.3.2 *Wronskianul* $W[\mathbf{y}^{(1)},\mathbf{y}^{(2)},\ldots,\mathbf{y}^{(n)}]$ *asociat unui sistem fundamental de soluţii* $\mathbf{y}^{(1)}(x),\mathbf{y}^{(2)}(x),\ldots,\mathbf{y}^{(n)}(x)$ *este determinantul matricei fundamentale* $\Gamma(x)$.

Teorema 2.3.4 *Condiţia necesară şi suficientă ca soluţiile*

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)},$$

ale sistemului (2.45), *să formeze un sistem fundamental de soluţii a acestuia este ca determinantul lui Wronski corespunzător să nu fie identic nul pe intervalul* $[a, b]$.

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi suficienţa, adică din

$$\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)} \in \operatorname{Ker} \mathbf{L} \qquad \text{şi} \qquad W[\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}]\Big|_{x=x_0} \neq 0$$

să rezulte că funcţiile

$$\mathbf{y}^{(1)}, \quad \mathbf{y}^{(2)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{y}^{(n)} \tag{2.57}$$

formează un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (2.45).

Demonstraţia se face prin reducere la absurd.

Presupunem că funcţiile $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$, ca elemente ale lui $\operatorname{Ker} \mathbf{L}$, sunt liniar dependente. Există atunci n constante, nu toate nule, astfel încât pentru orice $x \in [a, b]$ să avem

$$C_1\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}(x) = \mathbf{0}. \tag{2.58}$$

Scriind (2.58) pe componente şi luând $x = x_0$, deducem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_1^{(n)}(x_0) & = & 0, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_2^{(n)}(x_0) & = & 0, \\ \cdots, & & \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n)}(x_0) & = & 0. \end{cases} \tag{2.59}$$

Am obţinut astfel un sistem liniar şi omogen de n ecuaţii cu n necunoscute al cărui determinant este $W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]\Big|_{x=x_0}$, care prin ipoteză este diferit de zero, deci sistemul (2.59) are numai soluţia banală

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad \ldots, \quad C_n = 0,$$

ceea ce contrazice presupunerea. Deci, soluţiile (2.57) sunt liniar independente.

În baza Definiţiei 2.3.3 funcţiile (2.57) formează un sistem fundamental de soluţii ale sistemului (2.45) pe intervalul $[a, b]$.

Să demonstrăm necesitatea. Dacă soluţiile $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$ sunt liniar independente atunci, măcar într–un punct $x_0 \in [a, b]$, determinantul lui Wronski asociat acestor soluţii este diferit de zero.

Deoarece $\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}^{(n)}$ formează o bază în $\mathrm{Ker}\,\mathbf{L}$, orice $\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\,\mathbf{L}$ se scrie în mod unic în forma

$$\mathbf{y} = C_1\mathbf{y}^{(1)} + C_2\mathbf{y}^{(2)} + \cdots + C_n\mathbf{y}^{(n)}. \tag{2.60}$$

Considerând un $x_0 \in [a, b]$, notând $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$ şi scriind (2.60) pe coordonate în x_0, obţinem

$$\begin{cases} C_1 y_1^{(1)}(x_0) + C_2 y_1^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_1^{(n)}(x_0) = y_1^{(0)}, \\ C_1 y_2^{(1)}(x_0) + C_2 y_2^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_2^{(n)}(x_0) = y_2^{(0)}, \\ \ldots, \\ C_1 y_n^{(1)}(x_0) + C_2 y_n^{(2)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n)}(x_0) = y_n^{(0)}. \end{cases} \tag{2.61}$$

Deoarece sistemul (2.61) are soluţia unică $C_1, C_2, \ldots, C_n$, rezultă că determinantul sistemului, $W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]\Big|_{x=x_0}$, este nenul. ■

Teorema 2.3.5 (**Liouville**) *Dacă funcţia*

$$W(x) = W[\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)]$$

este wronskianul unui sistem de n soluţii ale sistemului (2.45), *atunci are loc egalitatea*

$$W(x) = W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} tr\, A(t)\, dt}, \qquad (\forall)\ x, x_0 \in [a, b], \tag{2.62}$$

unde $tr\, A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ *este urma matricei A a sistemului.*

Demonstraţie. Fără a restrânge generalitatea, presupunem că sistemul $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este liniar independent (în caz contrar $W(x) \equiv 0$ şi (2.62) este banal satisfăcută).

Fie $\Gamma(x)$ matricea fundamentală cu coloanele

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \quad \mathbf{y}^{(2)}(x), \quad \cdots, \quad \mathbf{y}^{(n)}(x).$$

Cu teorema creşterilor finite, avem

$$\Gamma(x+\varepsilon) = \Gamma(x) + \varepsilon\,\Gamma'(x) + o(\varepsilon), \quad x \in [a,b],$$

iar din ecuaţia (2.53) rezultă

$$\Gamma(x+\varepsilon) = \Gamma(x) - \varepsilon\,A(x)\Gamma(x) + o(\varepsilon), \quad x \in [a,b]. \tag{2.63}$$

Dacă în egalitatea (2.63) luăm determinantul ambelor membri, obţinem:

$$W(x+\varepsilon) = \det\left(I_n - \varepsilon\,A(x) + o(\varepsilon)\Gamma^{-1}(x)\right)W(x) = W(x)\Big(1 - \varepsilon\mathrm{tr}\,A(x) + o(\varepsilon)\Big),$$

unde ε este arbitrar şi suficient de mic. Trecând la limită pentru $\varepsilon \to 0$ rezultă

$$W'(x) = -\,\mathrm{tr}\,A(x)\,W(x), \quad x \in [a,b],$$

iar prin integrare se obţine formula (2.62). ■

2.3.4 Soluţia generală a sistemului omogen de ecuaţii diferenţiale liniare

Să presupunem că avem un sistem fundamental de soluţii

$$\mathbf{y}^{(1)}(x), \quad \mathbf{y}^{(2)}(x), \quad \ldots, \quad \mathbf{y}^{(n)}(x)$$

al sistemului (2.45). Atunci, orice altă soluţie a sistemului se scrie în mod unic în forma (2.60), unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante arbitrare.

Putem afirma că (2.60) constituie *soluţia generală* a sistemului (2.45), deoarece verifică sistemul, are în componenţa sa n constante arbitrare şi oricărei probleme de tip Cauchy a sistemului i se pot preciza în mod unic sistemul de constante $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încât soluţia determinată să satisfacă condiţia iniţială $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}^{(0)}$, cu $\mathbf{y}^{(0)}$ vector arbitrar din $\mathbb{R}^n$.

Cum vectorul din membrul drept al relaţiei (2.60) se poate scrie în forma $\mathbf{e}(\Gamma(x)C)$, unde C este matrice cu o singură coloană şi cu n linii, rezultă că soluţia generală a sistemului (2.45) poate fi scrisă şi în forma (2.55).

Observaţia 2.3.3 *Sistemul fundamental de soluţii pentru* (2.45) *nu este unic.*

Într-adevăr, se ştie că într–un spaţiu liniar n dimensional există o infinitate de baze. Dacă mulţimea de funcţii $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este o bază

în Ker **L** şi $\|C_i^j\| \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ este o matrice nesingulară, atunci sistemul de vectori

$$\widetilde{\mathbf{y}}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} C_j^i \mathbf{y}^{(j)}, \qquad i \in \overline{1,n}, \tag{2.64}$$

formează de asemeni o bază în Ker **L** şi deci avem un alt sistem fundamental de soluţii.

Matricea constantă C din (2.64) este matricea de trecere de la baza $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ la sistemul de vectori

$$\{\widetilde{\mathbf{y}}^{(1)}(x), \widetilde{\mathbf{y}}^{(2)}(x), \ldots, \widetilde{\mathbf{y}}^{(n)}(x)\}. \tag{2.65}$$

Dacă această matrice de trecere este şi nesingulară, sistemul de vectori (2.65) este, de asemenea, sistem fundamental de soluţii pentru sistemul (2.45). ■

2.4 Sisteme neomogene de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi

Să considerăm sistemul liniar şi neomgen de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{y}' + \mathbf{e}(A(x)Y) = \mathbf{f}(x), \tag{2.66}$$

în care matricea $A(x) = \|a_{ij}(x)\| \in \mathcal{M}_{n\times n}(I\!R)$ a coeficienţilor sistemului are elemente funcţii continue pe intervalul $[a,b]$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in C([a,b])$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C^1([a,b])$, iar $Y = \|y_i\|_{1\times n}$ este matricea coloană cu n linii a necunoscutelor $y_i \in C^1([a,b])$ ale sistemului.

Ne propunem să determinăm soluţiile sistemului (2.66) prin *metoda variaţiei constantelor*. Vom cerceta dacă soluţia generală a sistemului (2.66) se poate obţine din soluţia generală (2.60) a sistemului omogen asociat sistemului (2.66), înlocuind constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ prin funcţiile convenabil alese $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$.

Dacă mulţimea $\{\mathbf{y}^{(1)}(x), \mathbf{y}^{(2)}(x), \ldots, \mathbf{y}^{(n)}(x)\}$ este un sistem fundamental de soluţii a sistemului omogen asociat $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, atunci vom determina funcţiile

$$C_1(x), \quad C_2(x), \quad \cdots, \quad C_n(x),$$

continue şi cu derivate continue pe $[a,b]$, astfel încât

$$\mathbf{y}(x) = C_1(x)\mathbf{y}^{(1)}(x) + C_2(x)\mathbf{y}^{(2)}(x) + \cdots + C_n(x)\mathbf{y}^{(n)}(x) \tag{2.67}$$

să fie soluţie a sistemului neomogen (2.66). Impunând aceasta şi ţinând cont că $\mathbf{y}^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, sunt soluţii ale sistemului omogen asociat, găsim sistemul

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\mathbf{y}^{(i)}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in [a,b], \tag{2.68}$$

care are forma matriceală

$$\Gamma(x) \cdot C'(x) \quad = \quad F(x), \qquad x \in [a,b]. \tag{2.69}$$

Dar (2.68) este un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute $C_i'(x)$, $i = \overline{1,n}$.

Soluţia acestui sistem se deduce din (2.69) prin înmulţirea la stânga cu inversa matricei $\Gamma(x)$. Se obţine

$$C'(x) \quad = \quad \Gamma^{-1}(x) \cdot F(x). \tag{2.70}$$

Integrând ecuaţiile diferenţiale ordinare (2.70) se găseşte

$$C(x) = K + \int_{x_0}^{x} \Gamma^{-1}(s) \cdot F(s)ds, \tag{2.71}$$

unde $K \in \mathcal{M}_{1\times n}$ are elemente constante arbitrare.

Înlocuind (2.71) în (2.67), obţinem soluţia generală a sistemului neomogen (2.66)

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{e}\Big(\Gamma(x)K + \int_{x_0}^{x} \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s)F(s)ds\Big), \tag{2.72}$$

unde F este matricea coordonatelor vectorului $\mathbf{f}$ în baza canonică din $I\!R^n$.

Să mai observăm că (2.72) se scrie şi în forma

$$\mathbf{y} = \mathbf{e}\Big(\Gamma(x)K\Big) + \mathbf{e}\Big(\int_{x_0}^{x} \Gamma(x) \cdot \Gamma^{-1}(s)F(s)ds\Big) = \mathbf{y}_o(x) + \mathbf{y}_{\mathrm{p}}(x), \tag{2.73}$$

din care deducem că soluţia generală a sistemului neomogen (2.66) este suma dintre soluţia generală $\mathbf{y}_o(x)$ a sistemului omogen asociat $\mathbf{L}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ şi o soluţie particulară $\mathbf{y}_{\mathrm{p}}(x)$ a sistemului neomogen.

O soluţie particulară a sistemului neomogen (2.66) se obţine prin metoda variaţiei constantelor luând pentru K din (2.71) matricea coloană identic nulă.

2.5 Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Să studiem sistemele de ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul întâi, neomogene şi omogene, în care coeficienţii din (2.42) sunt constante reale notate cu $-a_{ij}$.

Forma generală a unui sistem neomogen este

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2.74}$$

în care $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sunt funcţii date, continue pe un compact $[a, b]$.

Dacă în (2.74) toate funcţiile f_i sunt identic nule, atunci sistemul corespunzător

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n, \\ \cdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{2.75}$$

este un sistem omogen de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu coeficienţi constanţi. Deoarece coeficienţii acestui sistem coincid cu cei ai sistemului (2.74), sistemul se numeşte în plus *asociatul* sistemului (2.74).

Forma matriceală a unui astfel de sistem omogen este

$$Y' = AY, \tag{2.76}$$

unde Y este matricea cu o singură coloană cu elementele coordonatele vectorului $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, iar A este matricea pătratică de ordinul n a cărei elemente sunt coeficienţii sistemului.

Toate rezultatele stabilite mai sus pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi variabili, omogene şi neomogene, sunt adevărate şi pentru sistemele (2.74) şi (2.75).

Vom determina soluţia generală a sistemului omogen (2.75) folosind teoria valorilor şi vectorilor proprii a unei matrice pătratice.

Pentru aceasta, căutăm soluţii particulare ale sistemului (2.76) de forma

$$Y = \Gamma\, e^{rx}, \tag{2.77}$$

unde Γ este matricea coordonatelor vectorului nenul $\boldsymbol{\gamma}$, deci $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}\Gamma$, iar r este un număr real sau complex.

Vom determina $\boldsymbol{\gamma}$ şi r din condiţia ca $\mathbf{y} = \mathbf{e}\Gamma\, e^{rx}$ să fie soluţie a sistemului (2.75), a cărui formă vectorială este

$$\mathbf{y}' = \mathbf{e}(AY). \tag{2.78}$$

Impunând condiţia ca Y din (2.77) să verifice (2.76), găsim că Γ este soluţia unui sistem liniar omogen a cărui formă matriceală este

$$(A - rE)\Gamma = O, \tag{2.79}$$

unde E este matricea unitate de ordinul n, iar O este matricea nulă.

Pentru ca sistemul algebric (2.79) să aibă soluţii nebanale, determinantul acestuia trebuie să fie nul. Astfel, obţinem ecuaţia algebrică de gradul n în necunoscuta r

$$\det(A - rE) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0, \tag{2.80}$$

numită *ecuaţie caracteristică* a sistemului (2.75).

Ecuaţiile (2.80) şi (2.79) arată că Γ din (2.77) este matricea coloană a vectorului propriu $\boldsymbol{\gamma}$ a matricei A, corespunzător valorii proprii r.

Dacă ecuaţia caracteristică (2.80) are toate cele n rădăcini reale şi distincte, $r_1, r_2, \ldots, r_n$, lor le corespund n vectori proprii $\boldsymbol{\gamma}_i$, respectiv n soluţii particulare ale sistemului neomogen (2.78)

$$\mathbf{y}_1(x) = \boldsymbol{\gamma}_1 e^{r_1 x}, \quad \mathbf{y}_2(x) = \boldsymbol{\gamma}_2 e^{r_2 x}, \quad \ldots, \quad \mathbf{y}_n(x) = \boldsymbol{\gamma}_n e^{r_n x}. \tag{2.81}$$

Wronskianul soluţiilor (2.81) este produsul dintre $e^{(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})x}$ şi determinantul Vandermonde construit cu numerele $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Deoarece rădăcinile caracteristice sunt distincte, rezultă că wronskianul soluţiilor menţionate în (2.81) este diferit de zero, fapt ce atrage concluzia că funcţiile (2.81) constituie un sistem fundamental de soluţii pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale (2.75).

În acest caz, soluţia generală a sistemului (2.75) este combinaţia liniară

$$\mathbf{y} = C_1 \gamma_1 e^{r_1 x} + C_2 \gamma_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n \gamma_n e^{r_n x}, \tag{2.82}$$

în care $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante arbitrare. Forma acestei soluţii generale este

$$Y = C_1\Gamma_1 e^{r_1 x} + C_2\Gamma_2 e^{r_2 x} + \cdots + C_n\Gamma_n e^{r_n x}. \tag{2.83}$$

Teorema 2.5.1 *Dacă ecuaţia caracteristică are, de pildă, rădăcina r_1 multiplă de ordinul k, atunci partea din soluţia generală corespunzătoare ei are forma*

$$\begin{pmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \\ \cdots \\ P_n(x) \end{pmatrix} e^{r_1 x}, \tag{2.84}$$

unde $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ sunt polinoame de grad cel mult $k-1$, având coeficienţii funcţii liniare de k constante oarecare C_1, C_2, $\ldots$, C_k. Polinoamele $P_1(x)$, $P_2(x)$, $\ldots$, $P_n(x)$ nu pot fi identic nule decât dacă toate constantele C_1, C_2, $\ldots$, C_k sunt nule.

Cazul rădăcinilor complexe poate fi tratat în mod analog. Vor rezulta soluţii complex conjugate în perechi. Din fiecare astfel de pereche se construieşte alte două soluţii reale luând semisuma acestora şi semidiferenţa împărţită prin unitatea imaginară.

Pentru determinarea soluţiilor particulare ale sistemelor neomogene se poate folosi metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange.

În cazul în care $f_i(x) = e^{\alpha x}(Q_i^1(x)\cos\beta x + Q_i^2(x)\sin\beta x)$, soluţii particulare se pot obţine prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi, fără cuadraturi. Mai precis, se caută soluţii particulare de forma termenului liber, adică de forma

$$y_i(x) = x^s e^{\alpha x}(R_i^1(x)\cos\beta x + R_i^2(x)\sin\beta x), \quad i = \overline{1,n},$$

unde R_i^1 şi R_i^2 sunt polinoame de aceleaşi grade cu respectiv polinoamele Q_i^1 şi Q_i^2, iar s este multiplicitatea lui $r = \alpha + i\beta$ ca rădăcină a ecuaţiei caracteristice.

Vom ilustra aceste afirmaţii prin exemple.

Exemplul 2.5.1 *Să se determine soluţia generală a sistemului diferenţial*

omogen

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - 2y_2 + 3y_3, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + y_3, \\ y_3' &= y_1 + 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul de ecuaţii diferenţiale dat este de ordinul întâi, omogen, cu coeficienţi constanţi şi se poate scrie în forma matriceală

$$Y' = AY,$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

este matricea sistemului, iar

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

este matricea funcţiilor necunoscute ale sistemului diferenţial.

Pentru a determina soluţia generală a sistemului, aplicăm teoria valorilor şi vectorilor proprii prezentată mai sus.

Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile ecuaţiei caracteristice

$$\det(A - rE) = \begin{vmatrix} 2-r & -2 & 3 \\ 1 & 1-r & 1 \\ 1 & 3 & -1-r \end{vmatrix} = 0,$$

adică a ecuaţiei $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$. Rădăcinile acestei ecuaţii sunt $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -2$.

Deoarece valorile proprii sunt reale şi distincte, vectorii proprii corespunzători sunt liniar independenţi în $\mathbb{R}^3$.

Vectorul propriu corespunzător valorii proprii r este o soluţie nebanală a sistemului liniar şi omogen

$$\begin{cases} (2-r)\gamma_1 & -2\gamma_2 & +3\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 & +(1-r)\gamma_2 & +\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 & +3\gamma_2 & +(-1-r)\gamma_3 & = & 0. \end{cases} \tag{2.85}$$

Cele trei sisteme corespunzătoare rădăcinilor caracteristice, obţinute din (2.85) luând succesiv pentru r valorile $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = -2$, sunt:

$$\begin{cases} \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 \quad + \gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 2\gamma_3 & = & 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 - 2\gamma_2 + \gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 - 4\gamma_3 & = & 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3 & = & 0. \end{cases}$$

Soluţiile nebanale ale acestor sisteme omogene

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = (-1, 1, 1), \quad \boldsymbol{\gamma}^{(2)} = (1, 1, 1), \quad \boldsymbol{\gamma}^{(3)} = (11, 1, -14).$$

sunt vectorii proprii corespunzători valorilor proprii menţionate.

Corespunzător acestor vectori proprii avem următoarele soluţii liniar independente ale sistemului

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x}; \quad Y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}; \quad Y^{(3)}(x) = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{pmatrix} e^{-2x}$$

şi prin urmare soluţia generală a sistemului diferenţial este

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x) + C_3 Y^{(3)}(x),$$

unde C_1, C_2, C_3 sunt constante arbitrare.

Egalând elementele corespunzătoare găsim soluţia generală pe componente (coordonate)

$$\begin{cases} y_1(x) &=& -C_1e^x + C_2e^x + 11C_3e^{-2x}, \\ y_2(x) &=& C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x}, \\ y_3(x) &=& C_1e^x + C_2e^{3x} - 14C_3e^{-2x}. \end{cases} \tag{2.86}$$

Integrarea sistemului se poate efectua şi prin metoda eliminării. Ecuaţia diferenţială ordinară, de ordinul al treilea, cu coeficienţi constanţi, omogenă, în care funcţia necunoscută este y_2 are expresia

$$y_2''' - 2y_2'' - 5y_2' + 6y_2 = 0, \tag{2.87}$$

iar soluţia sa generală este dată în $(2.86)_2$. Celelalte coordonate ale soluţiei generale $\mathbf{y}$ se obţin din legăturile acestora cu funcţia y_2. ■

Exemplul 2.5.2 *Să se determine soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale omogene cu coeficienţi constanţi*

$$\begin{cases} y_1' &=& y_1 - y_2, \\ y_2' &=& y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Soluţie. Matricea sistemului, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, are ecuaţia caracteristică $r^2 - 4r + 4 = 0$ cu rădăcina dublă $r = 2$.

Conform Teoremei 2.5.1, soluţia generală a sistemului este de forma

$$\begin{cases} y_1 &=& (A_1x + C_1)e^{2x}, \\ y_2' &=& (A_2x + C_2)e^{2x}, \end{cases}$$

unde constantele A_1, A_2, C_1, C_2 se determină din sistemul

$$\begin{cases} A_1 + A_2 &=& 0, \\ A_1 + C_1 + C_2 &=& 0, \\ A_1 + A_2 &=& 0, \\ A_2 + C_1 + C_2 &=& 0, \end{cases}$$

din care se găseşte

$$A_1 = C_1 + C_2, \qquad A_2 = -C_1 - C_2.$$

Astfel, soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale este

$$\begin{cases} y_1 &= ((C_1 + C_2)x + C_1)e^{2x}, \\ y_2' &= (-(C_1 + C_2)x + C_2)e^{2x}, \end{cases}$$

şi ea poate fi scrisă matriceal în forma

$$Y = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x),$$

unde

$$Y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ -x \end{pmatrix} e^{2x}, \quad Y^{(2)} = \begin{pmatrix} x \\ 1-x \end{pmatrix} e^{2x}.$$

■

Exemplul 2.5.3 *Determinaţi soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale omogene cu coeficienţi constanţi*

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_3' &= -y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul se poate scrie matriceal în forma

$$Y' = AY,$$

unde $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ este matricea sistemului.

Conform Teoremei 2.5.1, contribuţia rădăcinii triple $r = 1$ la soluţia generală a sistemului trebuie căutată în forma

$$Y = \begin{pmatrix} A_1x^2 + B_1x + C_1 \\ A_2x^2 + B_2x + C_2 \\ A_3x^2 + B_3x + C_3 \end{pmatrix} e^x.$$

Se deduce că coeficienţii A_1, A_2 şi A_3 sunt nuli, iar

$$\begin{cases} B_1 &= C_1 - C_2 - C_3, \\ B_2 &= 2(C_1 - C_2 - C_3), \\ B_3 &= -C_1 + C_2 + C_3 \end{cases}$$

Astfel, Y se scrie ca o combinaţie liniară de constantele C_1, C_2, C_3

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} x+1 \\ 2x \\ -x \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} -x \\ 1-2x \\ x \end{pmatrix} e^x + C_3 \begin{pmatrix} -x \\ -2x \\ x+1 \end{pmatrix} e^x,$$

şi deci am obţinut chiar soluţia generală a sistemului. ■

Exemplul 2.5.4 *Să se integreze sistemul* $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$

Soluţie. Se aplică metoda valorilor şi vectorilor proprii.

Valorile proprii sunt numerele complex conjugate $r_1 = 3 + i$, $r_2 = 3 - i$.

După determinarea vectorilor proprii corespunzători se găsesc soluţiile complex conjugate

$$\widetilde{Y}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3+i)x}, \quad \widetilde{Y}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(3-i)x}.$$

Pornind de la acestea, determinăm alte două soluţii liniar independente,

$$Y^{(1)}(x) = \frac{\widetilde{Y}^{(1)}(x) + \widetilde{Y}^{(2)}(x)}{2} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^{3x},$$

$$Y^{(2)}(x) = \frac{\widetilde{Y}^{(1)}(x) - \widetilde{Y}^{(2)}(x)}{2i} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^{3x}.$$

Aşadar, soluţia generală a sistemului, scrisă matriceal, este

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x),$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante reale arbitrare. ■

Exemplul 2.5.5 *Să se integreze sistemul* $\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2. \end{cases}$

Soluţie. Valorile proprii ale matricei sistemului sunt $r_1 = r_2 = 1$.

Sistemul de ecuaţii care dă coordonatele vectorilor proprii se reduce la o singură ecuaţie $\gamma_1 - \gamma_2 = 0$. Toţi vectorii proprii sunt de forma $\boldsymbol{\gamma} = \lambda(1, 1)$, unde $\lambda \neq 0$ şi deci nu există doi vectori proprii liniar independenţi.

Se caută atunci soluţia generală a sistemului în forma

$$y_1(x) = (C_1 + C_2x)e^x, \quad y_2(x) = (D_1 + D_2x)e^x.$$

şi, în final, se găseşte $y_1(x) = (C_1 + C_2x)e^x, \quad y_2(x) = (C_1 + C_2 + C_2x)e^x$, unde C_1 şi C_2 sunt constante reale arbitrare. ∎

Exemplul 2.5.6 *Să se determine soluţia generală a sistemului*

$$\begin{cases} y_1' &= -3y_1 - 4y_2 + 2x, \\ y_2' &= y_1 + y_2 + x. \end{cases}$$

Soluţie. Determinăm întâi soluţia generală a sistemului omogen asociat

$$\begin{cases} y_1' &= -3y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= y_1 + y_2. \end{cases}$$

Pentru aceasta, procedăm ca în exemplul precedent şi găsim

$$\begin{cases} y_1^{(o)}(x) &= (-2C_1 + C_2 - 2C_2x)e^{-x}, \\ y_2^{(o)}(x) &= (C_1 + C_2x)e^{-x}. \end{cases}$$

Deoarece $r = 0$ nu este rădăcină caracteristică a sistemului omogen asociat, căutăm soluţia particulară în forma

$$y_1^p(x) = A_1x + B_1, \quad y_2^p(x) = A_2x + B_2$$

şi determinăm coeficienţii celor două polinoame din condiţia ca sistemul să fie verificat. Se obţin sistemele

$$\begin{cases} 3A_1 + 4A_2 - 2 &= 0, \\ A_1 + A_2 + 1 &= 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 + 3B_1 + 4B_2 &= 0, \\ A_2 - B_1 - B_2 &= 0, \end{cases}$$

de unde deducem $A_1 = -6, A_2 = 5, B_1 = 14, B_2 = -9$.

Deoarece soluţia generală a sistemului dat este suma dintre soluţia generală a sistemului omogen asociat şi soluţia particulară determinată, avem

$$\begin{cases} y_1(x) &= y_1^{(o)}(x) + y_1^p(x) &= (-2C_1 + C_2 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14, \\ y_2(x) &= y_2^{(o)}(x) + y_2^p(x) &= (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9. \end{cases}$$

Forma matriceală a acestei soluţii este

$$Y(x) = Y^{(o)}(x) + Y^p(x) = C_1Y^{(1)}(x) + C_2Y^{(2)}(x) + Y^p(x).$$

∎

Capitolul 3

Ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi

3.1 Ecuaţii diferenţiale liniare cu derivate parţiale de ordinul întâi

3.1.1 Definiţii. Suprafeţe integrale

Definiţia 3.1.1 *O relaţie de forma*

$$F\Big(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big) = 0, \tag{3.1}$$

unde F este o funcţie reală continuă de $2n+1$ variabile reale definită pe un domeniu $\Delta \subset I\!R^{2n+1}$, se numeşte **ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi,** *dacă se cere să se determine funcţia*

$$u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.2}$$

cu derivate parţiale de ordinul întâi continue într–un domeniu $D \subset I\!R^n$, astfel încât să avem

$$F\Big((\mathbf{x}); \varphi(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x})\Big) \equiv 0 \tag{3.3}$$

pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$.

Definiţia 3.1.2 *Funcţia* $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ *din* (3.2) *care satisface condiţia* (3.3) *se numeşte* **soluţie** *sau* **suprafaţă integrală** *a ecuaţiei* (3.1).

Definiţia 3.1.3 *Ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi de forma*

$$X_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{3.4}$$

se numeşte **ecuaţie liniară şi omogenă**.

Forma (3.4) arată că ecuaţia depinde liniar de derivatele parţiale ale funcţiei necunoscute u, iar coeficienţii X_k sunt funcţii numai de variabila vectorială $\mathbf{x}$, sau altfel spus de variabilele independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

În cele ce urmează vom presupune că funcţiile X_k sunt de clasă $C^1(D)$ şi nu se anulează simultan în D, ceea ce înseamnă că are loc inegalitatea

$$X_1^2(\mathbf{x}) + X_2^2(\mathbf{x}) + \cdots + X_n^2(\mathbf{x}) > 0, \quad (\forall)\ \mathbf{x} \in D. \tag{3.5}$$

3.1.2 Sistem caracteristic. Curbe caracteristice

Considerăm ecuaţia liniară (3.4) în care funcţiile $X_k \in C^1(D)$ satisfac în D condiţia (3.5).

Definiţia 3.1.4 *Sistemul simetric definit în D*

$$\frac{dx_1}{X_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n(\mathbf{x})}, \tag{3.6}$$

se numeşte **sistemul caracteristic asociat** *ecuaţiei cu derivate parţiale* (3.4).

Definiţia 3.1.5 *Curbele integrale ale sistemului* (3.6) *se numesc* **curbe caracteristice** *ale ecuaţiei cu derivate parţiale liniară şi omogenă* (3.4).

În ipoteza că x_n este variabilă independentă atunci, din Capitolul 2, paragraful 2, ştim că soluţia generală a sistemului carcteristic (3.6) este

$$x_i \;=\; \varphi_i(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{3.7}$$

sau, rezolvând în raport cu constantele arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$,

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_2, \\ \qquad \cdots & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= C_{n-1} \end{cases} \tag{3.8}$$

unde $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt funcţii continue cu derivate parţiale continue în D.

Oricare din relaţiile (3.8) se numeşte *integrală primă* a sistemului caracteristic (3.6), iar ansamblul (3.8) reprezintă o familie de curbe integrale, sau o familie de curbe caracteristice ale ecuaţiei (3.4).

Vom vedea că integrarea ecuaţiei (3.4) este strâns legată de integrarea sistemului caracteristic asociat (3.6). Această legătură este dată de teorema următoare.

Teorema 3.1.1 *Dacă relaţia*

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \tag{3.9}$$

este o integrală primă a sistemului caracteristic (3.6), *atunci funcţia reală de n variabile reale definită pe D*

$$u = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3.10}$$

este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (3.4).

Demonstraţie. Folosind Teorema 2.2.1, rezultă că dacă (3.9) este o integrală primă a sistemului caracteristic (3.6), atunci de–a lungul unei curbe caracteristice avem

$$X_1(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_n} = 0. \tag{3.11}$$

Egalitatea (3.11) fiind adevărată pentru orice constantă C, este adevărată pentru orice curbă integrală situată în D, de unde rezultă că este adevărată pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$; prin urmare (3.10) este o soluţie a ecuaţiei (3.4) în D. ■

3.1.3 Soluţia generală

Teorema 3.1.2 *Dacă $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime ale sistemului caracteristic* (3.6), *independente funcţional pe mulţimea $D' \subset D$, şi*

$$\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$$

o funcţie oarecare cu derivate parţiale continue într–un domeniu $\Delta \subset \mathbb{R}^{n-1}$, atunci funcţia $\mathbf{x} \mapsto u(\mathbf{x})$, unde

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\mathbf{x})), \tag{3.12}$$

este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (3.4) *în D'.*

Demonstraţie. În prima etapă arătăm că funcţia $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ verifică ecuaţia (3.4). Pentru aceasta trebuie să calculăm derivatele parţiale de ordinul întâi ale acestei funcţii. Aplicând regula de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & = & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_1}\cdot\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_2}\cdot\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}}\cdot\dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & = & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_1}\cdot\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_2}\cdot\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2}+\cdots+\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}}\cdot\dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2}, \\ \cdots, & & \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} & = & \dfrac{\partial \Phi}{\partial v_1}\cdot\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}+\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_2}\cdot\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_n}+\cdots+\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_{n-1}}\cdot\dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}. \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Dacă în (3.13) înmulţim prima relaţie cu X_1, a doua cu X_2 şi aşa mai departe până la ultima relaţie pe care o inmulţim cu X_n şi adunăm pe coloane rezultatele înmulţirilor, obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_i} \;=\; \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial \Phi}{\partial v_j}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\cdot\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}\Big) \tag{3.14}$$

Însă, în (3.14) fiecare paranteză din partea dreaptă este nulă deoarece după Teorema 3.1.1 funcţiile $\psi_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $j = \overline{1, n-1}$, sunt soluţii ale ecuaţiei cu derivate parţiale (3.4). Rezultă că funcţia u din (3.12) este soluţie a ecuaţiei (3.4).

Reciproc, orice soluţie $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a ecuaţiei (3.4) este de forma (3.12).

În adevăr, $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ fiind soluţie a ecuaţiei (3.4), avem

$$X_1(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x})\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{3.15}$$

Pe lângă aceasta, avem şi relaţiile

$$X_1(\mathbf{x})\frac{\partial \psi_j}{\partial x_1} + X_2(\mathbf{x})\frac{\partial \psi_j}{\partial x_2} + \cdots + X_n(\mathbf{x})\frac{\partial \psi_j}{\partial x_n} = 0, \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{3.16}$$

care exprimă că integralele prime $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul întâi (3.4).

Pentru orice punct fixat $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$, ecuaţiile (3.15) şi (3.16) formează un sistem de n ecuaţii liniare şi omogene în necunoscutele X_1,

X_2, ..., X_n. Datorită condiţiei (3.5), acest sistem are şi soluţii nebanale. Conform teoremei lui Rouché, determinantul sistemului,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}, \qquad (3.17)$$

trebuie să fie nul pentru orice $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$. Aşadar, putem scrie

$$\frac{D(u, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)} = 0, \quad (\forall)\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D.$$

Deoarece $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime independente funcţional în D, există domeniul $D' \subset D$ în care matricea jacobiană $J_{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})$, unde $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$, are rangul $n-1$. Aceasta înseamnă că cel puţin un minor de ordinul $n-1$ al matricei este nenul pe D'. Fie că acest minor este determinantul funcţional

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})} \neq 0, \quad (\forall)\ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D. \qquad (3.18)$$

Folosind rezultatele de la dependenţă şi independenţă funcţională a funcţiilor, rezultă că funcţia u depinde funcţional pe $D'' \subset D'$ de funcţiile $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$. Prin urmare, putem scrie $u = \Phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$. ■

Definiţia 3.1.6 *Funcţia u din* (3.12), *unde Φ este o funcţie arbitrară definită pe un domeniu din spaţiul $\mathbb{R}^{n-1}$, se numeşte* **soluţia generală** *a ecuaţiei cu derivate parţiale liniare şi omogenă* (3.4).

Exerciţiul 3.1.1 *Să se integreze următoarele ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi omogene*

1. $(x + 2y)\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$ **2**. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$

3. $x(2x^3 - y^3)\dfrac{\partial z}{\partial x} + y(x^3 - 2y^3)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0;$ **4**. $2\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

Soluţie. Sistemele caracteristice corespunzătoare ale acestor ecuaţii sunt:

$$\mathbf{1}.\quad \frac{dx}{x+2y}=\frac{dy}{-y};\qquad \mathbf{2}.\quad \frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x};$$

$$\mathbf{3}.\quad \frac{dx}{x(2x^3-y^3)}=\frac{dy}{y(x^3-2y^3)};\quad \mathbf{4}.\quad \frac{dx}{2\sqrt{x}}=\frac{dy}{-y}.$$

Aceste sisteme caracteristice sunt echivalente respectiv cu ecuaţiile diferenţiale ordinare

$$\mathbf{1}.\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+2y};\qquad \mathbf{2}.\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y};$$

$$\mathbf{3}.\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y(x^3-2y^3)}{x(2x^3-y^3)};\quad \mathbf{4}.\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2\sqrt{x}}.$$

Prima şi a treia ecuaţie diferenţială de ordinul întâi este omogenă şi se integrează utilizând substituţia $\dfrac{y}{x}=u$, unde noua funcţie necunoscută este u ce depinde de x, iar celelalte două ecuaţii sunt cu variabile separabile. Soluţiile acestor ecuaţii diferenţiale ordinare sunt:

$$\mathbf{1}.\ y(x+y)=C;\quad \mathbf{2}.\ x^2+y^2=C;\quad \mathbf{3}.\ \frac{x^3+y^3}{x^2y^2}=C;\quad \mathbf{4}.\ \sqrt{x}+\ln y=C.$$

Fiecare din relaţiile de mai sus reprezintă o integrală primă pentru ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi omogenă corespunzătoare.

Soluţia generală a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi omogenă este o funcţie arbitrară de $n-1$ integrale prime independente. Cum pentru toate aceste exerciţii n este 2, la fiecare avem nevoie doar de câte o integrală primă şi le vom considera pe cele deduse mai sus. Prin urmare, soluţiile ecuaţiilor date sunt respectiv

$$\mathbf{1}.\quad z=\psi(y(x+y));\quad \mathbf{2}.\quad z=\psi(x^2+y^2);$$

$$\mathbf{3}.\quad z=\psi\Big(\frac{x^3+y^3}{x^2y^2}\Big);\quad \mathbf{4}.\quad z=\psi(\sqrt{x}+\ln y),$$

unde ψ este o funcţie oarecare de clasă $C^1(I)$ şi I un interval real. ∎

Exerciţiul 3.1.2 *Să se determine soluţiile generale ale următoarelor ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi omogene*

1. $(az-by)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(bx-cz)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(cy-ax)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;$

2. $(x-a)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y-b)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(z-c)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;$

3. $xz\dfrac{\partial u}{\partial x}-yz\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x^2-y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;$

4. $(x-y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;$

5. $xy\dfrac{\partial w}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial w}{\partial y}+z^2\dfrac{\partial w}{\partial z}=0;$

6. $x^2\dfrac{\partial F}{\partial x}-xy\dfrac{\partial F}{\partial y}+y^2\dfrac{\partial F}{\partial z}=0;$

7. $\sqrt{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;$

8. $2\cosh x\,\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\sinh x\,\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\sinh x\,\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

Soluţie. Sistemele caracteristice corespunzătoare ecuaţiilor de mai sus sunt:

1. $\dfrac{dx}{az-by}=\dfrac{dy}{bx-cz}=\dfrac{dz}{cy-ax};$

2. $\dfrac{dx}{x-a}=\dfrac{dy}{y-b}=\dfrac{dz}{z-c};$

3. $\dfrac{dx}{xz}=\dfrac{dy}{-yz}=\dfrac{dz}{x^2-y^2};$

4. $\dfrac{dx}{x-y+z}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z};$

5. $\dfrac{dx}{xy}=\dfrac{dy}{-y^2}=\dfrac{dz}{z^2};$

6. $\dfrac{dx}{x^2}=\dfrac{dy}{-xy}=\dfrac{dz}{y^2};$

$$\mathbf{7.}\quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}};$$

$$\mathbf{8.}\quad \frac{dx}{2\cosh x} = \frac{dy}{2\sinh x} = \frac{dz}{-z\sinh x}.$$

Vom căuta combinaţii integrabile ale rapoartelor egale.

1. Prin înmulţirea celor trei rapoarte cu respectiv x, y şi z şi adunarea numărătorilor şi a numitorilor, obţinem un nou raport care are numitorul egal cu zero, iar numărătorul este diferenţiala expresiei $x^2+y^2+z^2$. Rezultă că şi numărătorul trebuie să fie zero şi prin urmare $x^2+y^2+z^2=C_1$ este prima integrală primă a sistemului caracteristic corespunzător primei ecuaţii.

Înmulţind acum rapoartele cu c, a şi b şi adunând iarăşi numărătorii şi numitorii între ei, obţinem din nou zero la numitor. Prin urmare $cx+ay+bz=C_2$ este a doua integrală primă.

$$\mathbf{2.}\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x-a} = \dfrac{dy}{y-b} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{x-a}{y-b} = C_1, \\[2ex] \dfrac{dy}{y-b} = \dfrac{dz}{z-c} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{y-b}{z-c} = C_2. \end{cases}$$

3. Considerăm primele două rapoarte. După simplificare prin z se obţine combinaţia integrabilă $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{-y}$ care conduce la integrala primă $xy = C_1$.

A doua integrală primă se obţine după ce adunăm numărătorii şi numitorii din primele două rapoarte, raportul găsit egalându–l cu al treilea. Avem $\dfrac{d(x+y)}{z(x-y)} = \dfrac{dz}{x^2-y^2}$, de unde, după simplificare cu $x-y$, se obţine combinaţia integrabilă

$$(x+y)d(x+y) = zdz$$

care conduce la integrala primă $(x+y)^2 - z^2 = C_2$.

4. Integrând $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$ obţinem integrala primă $\psi_1(x,y,z) = \dfrac{y}{z}$.

Pentru a obţine a doua integrală primă pornim de la egalitatea

$$\frac{dx}{x-y+z} = \frac{d(y-z)}{y-z},$$

dedusă folosind o proprietate a rapoartelor egale. Notând $y-z=u$, se ajunge la ecuaţia liniară de ordinul întâi neomogenă $\dfrac{dx}{du} - \dfrac{1}{u}x = -1$ care

are soluţia $x = u(C_2 - \ln u)$. Revenind la variabilele x, y, z se obţine a doua integrală primă $\dfrac{x}{y-z} + \ln(y-z) = C_2$.

5. Cele două integrale prime independente funcţional se obţin considerând primele două rapoarte şi respectiv ultimele două. Se obţine:

$$xy = C_1; \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = C_2.$$

6. O integrală primă se găseşte prin considerarea primelor două rapoarte. După simplificare cu x şi apoi integrare, se obţine $xy = C_1$.

Pentru cea de a doua integrală primă vom folosi integrala primă găsită.

Din ultimele două rapoarte se obţine $y\,dy = -x\,dz$ care, după înmulţire cu y şi folosirea integralei prime deja găsită, se obţine $\frac{1}{3}y^3 + C_1 z = C_2$. Înlocuind $C_1 = xy$ avem că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{1}{3}y^3 + xyz = C_2.$$

7. Cele două combinaţii integrabile le vom determina considerând primele două rapoarte şi apoi ultimele două. Integrând, obţinem:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = C_1; \quad \sqrt{y} - \sqrt{z} = C_2.$$

8. O combinaţie integrabilă este $\dfrac{dx}{2\cosh x} = \dfrac{dy}{2\sinh x}$ din care rezultă integrala primă $y - \ln\cosh x = C_1$.

A doua integrală primă se obţine dacă se consideră ultimele două rapoarte după care se simplifică prin $\sinh x$. Integrând în ambii membri, avem $z^2\,e^y = C_2$.

Astfel, soluţiile generale ale ecuaţiilor cu derivate parţiale din enunţ sunt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}.\quad u(x,y,z) &= \Phi(x^2+y^2+z^2,\ cx+ay+bz);\\
\mathbf{2}.\quad u(x,y,z) &= \Phi\left(\frac{x-a}{y-b}, \frac{y-b}{z-c}\right);\\
\mathbf{3}.\quad u(x,y,z) &= \Phi(xy,\ (x+y)^2-z^2);\\
\mathbf{4}.\quad u(x,y,z) &= \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y-z} + \ln(y-z)\right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5}.\quad u(x,y,z) &= \Phi(xy,\,\frac{1}{y}+\frac{1}{z});\\
\mathbf{6}.\quad u(x,y,z) &= \Phi(xy,\,\frac{1}{3}y^3+xyz);\\
\mathbf{7}.\quad u(x,y,z) &= \Phi(\sqrt{x}-\sqrt{y},\,\sqrt{y}-\sqrt{z});\\
\mathbf{8}.\quad u(x,y,z) &= \Phi(y-\ln\cosh x,\,z^2e^y),
\end{aligned}$$

unde Φ este o funcţie arbitrară de integralele prime menţionate. ■

3.1.4 Problema lui Cauchy

În general, în problemele practice, nu interesează soluţii arbitrare a ecuaţiei (3.4), ci acele soluţii care să îndeplinească anumite condiţii iniţiale.

Definiţia 3.1.7 *Problema determinării în domeniul $D \subset I\!\!R^n$ a acelei soluţii $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a ecuaţiei cu derivate parţiale liniare şi omogene* (3.4) *care pentru $x_n = x_n^0$ se reduce la o funcţie dată $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in C^1(D')$, unde $D' \subset I\!\!R^{n-1}$, adică*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in D', \tag{3.19}$$

se numeşte **problema lui Cauchy** *pentru ecuaţia* (3.4).

În anumite condiţii impuse funcţiilor X_k şi ψ soluţia problemei Cauchy există şi este unică.

În cele ce urmează ne vom ocupa de determinarea efectivă a soluţiei problemei lui Cauchy.

Această soluţie va fi de forma (3.12) şi problema se reduce la a determina funcţia Φ, deci de a determina legătura între integralele prime ψ_1, ψ_2, ..., ψ_{n-1}.

Fie o vecinătate a punctului $M_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0)$, inclusă în D, în care determinantul funcţional (3.18) este diferit de zero. O asemenea vecinătate există în baza faptului că funcţiile ψ_k, $k = \overline{1, n-1}$, sunt continue şi au derivate parţiale continue pe D. Dacă în (3.8) punem $x_n = x_n^0$, obţinem sistemul

$$\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) \;=\; C_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{3.20}$$

care, rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, conduce la

$$x_j \;=\; \omega_j(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}), \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{3.21}$$

Putem enunţa acum următoarea teoremă.

Teorema 3.1.3 *Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia* (3.4) *cu condiţia iniţială* (3.19) *este dată de*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(\omega_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \cdots, \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}))$$

unde $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ *sunt* $n-1$ *integrale prime independente funcţional ale sistemului caracteristic* (3.6).

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că funcţia u din enunţul teoremei este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (3.4), apoi că verifică condiţia iniţială (3.19).

Faptul că u este soluţie a ecuaţiei (3.4) rezultă imediat din faptul că u este de forma $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})$ după cum rezultă din expresia ei.

Soluţia verifică condiţia iniţială în vecinătatea U a punctului M_0. În adevăr pentru $x_n = x_n^0$, conform relaţiilor (3.20) şi (3.21), rezultă că (3.19) este îndeplinită. Din modul cum este construită funcţia u rezultă şi unicitatea ei. ■

Exerciţiul 3.1.3 *Să se rezolve problema lui Cauchy pentru ecuaţiile cu derivate parţiale liniare şi omogene*

$$\begin{aligned} \mathbf{1.} \quad 2x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z^3\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \\ \mathbf{2.} \quad zux + (x-z)^2\frac{\partial u}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \end{aligned}$$

cu condiţiile iniţiale date respectiv de

$$\mathbf{1.} \quad u(x, y, 1) = x + y, \qquad \mathbf{2.} \quad u(x, 0, z) = 2z(z - x).$$

Soluţie. Sistemele caracteristice corespunzătoare

$$\mathbf{1.} \quad \frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z^3}, \qquad \mathbf{2.} \quad \frac{dx}{z} = \frac{dy}{(x-z)^2} = \frac{dz}{x}$$

au integralele prime

$$\mathbf{1.} \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = xy^2, \\ \psi_2(x, y, z) = \dfrac{1}{z^2} + \ln x, \end{cases} \qquad \mathbf{2.} \begin{cases} \psi_1(x, y, z) = x^2 - z^2 \\ \psi_2(x, y, z) = 2y + (x - z)^2. \end{cases}$$

Sistemul (3.20), în cazul acestor ecuaţii cu derivate parţiale, devine respectiv

$$\mathbf{1}.\ \begin{cases} xy^2 &= C_1 \\ 1+\ln x &= C_2 \end{cases}, \qquad \mathbf{2}.\ \begin{cases} x^2-z^2 &= C_1, \\ (x-z)^2 &= C_2. \end{cases}$$

Rezolvând aceste sisteme, găsim

$$\mathbf{1}.\begin{cases} x = e^{C_2-1} = \omega_1(C_1,C_2) \\ y = \sqrt{\dfrac{C_1}{e^{C_2-1}}} = \omega_2(C_1,C_2) \end{cases}, \quad \mathbf{2}.\begin{cases} x = \dfrac{C_1+C_2}{2\sqrt{C_2}} &= \omega_1(C_1,C_2), \\ z = \dfrac{C_1-C_2}{2\sqrt{C_2}} &= \omega_2(C_1,C_2). \end{cases}$$

Conform Teoremei 3.1.3, avem că soluţia problemei lui Cauchy este

$$u(x,y,z) = \psi(\omega_1(\psi_1,\psi_2),\omega_2(\psi_1,\psi_2)).$$

Deoarece expresiile funcţiei ψ sunt respectiv

$$\mathbf{1}.\quad \psi(x,y) = x+y, \qquad \mathbf{2}.\quad \psi(x,z) = 2z(z-x),$$

rezultă că soluţiile problemei lui Cauchy pentru cele două ecuaţii cu derivate parţiale sunt

$$\begin{aligned} \mathbf{1}.\quad u(x,y,z) &= \omega_1(\psi_1,\psi_2)+\omega_2(\psi_1,\psi_2) \\ \mathbf{2}.\quad u(x,y,z) &= 2\omega_2(\psi_1,\psi_2)\Big(\omega_2(\psi_1,\psi_2)-\omega_1(\psi_1,\psi_2)\Big). \end{aligned}$$

Efectuând calculele, găsim

$$\begin{aligned} \mathbf{1}.\quad u(x,y,z) &= e^{\psi_2(x,y,z)-1}+\sqrt{\frac{\psi_1(x,y,z)}{e^{\psi_2(x,y,z)-1}}} \\ \mathbf{2}.\quad u(x,y,z) &= \psi_2(x,y,z)-\psi_1(x,y,z). \end{aligned}$$

Înlocuind pe ψ_1 şi ψ_2, obţinem $u(x,y,z) = xe^{z^{-2}-1}+y\sqrt{e^{1-z^{-2}}}$ şi respectiv $u(x,y,z) = 2y+2z^2-2xz$. ■

3.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi, cuasiliniare

Definiţia 3.2.1 *O ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi de forma*

$$X_1(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+X_n(\mathbf{x},u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=X_{n+1}(\mathbf{x},u) \tag{3.22}$$

se numeşte **ecuaţie cuasiliniară neomogenă**.

O astfel de ecuaţie este liniară în raport cu derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei necunoscute u care depinde de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (de variabila vectorială $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$), iar coeficienţii X_k sunt funcţii atât de variabila vectorială independentă $\mathbf{x}$ cât şi de funcţia u.

Vom presupune că funcţiile X_k, $k=1,2,\ldots,n$, sunt continue pe domeniul $D\subset I\!\!R^{n+1}$, au derivate parţiale continue în D şi

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)>0,\quad (\forall)\ (x_1,x_2,\ldots,x_n,u)\in D.$$

3.2.1 Soluţia generală

Teorema 3.2.1 *Integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale* (3.22) *se reduce la integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale liniară cu* $n+1$ *variabile*

$$X_1(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_2}+\cdots+X_n(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial x_n}+X_{n+1}(\mathbf{x},u)\frac{\partial V}{\partial u}=0.$$

Demonstraţie. Să căutăm pentru ecuaţia cuasiliniară (3.22) o soluţie u, definită implicit de ecuaţia

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n,u)=0, \tag{3.23}$$

V fiind o funcţie necunoscută ce urmează să o determinăm. În ipoteza că V este continuă şi are derivate parţiale continue, cu derivata parţială în raport cu u diferită de zero în interiorul lui D, din (3.23) şi teorema de existenţă şi unicitate a funcţiilor reale de n variabile reale definite implicit de o ecuaţie în $n+1$ necunoscute, obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},\quad \ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial V}{\partial u}},$$

pe care le înlocuim în ecuaţia (3.22). În acest fel ajungem la

$$X_1\frac{\partial V}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial V}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial V}{\partial x_n}+X_{n+1}derpVu=0, \tag{3.24}$$

care este o ecuaţie liniară şi omogenă în necunoscuta V. Fie

$$\psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = C_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.25}$$

n integrale prime independente ale ecuaţiei (3.24). Soluţia generală a ecuaţiei (3.24) este

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{3.26}$$

iar ecuaţia $V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$ defineşte implicit soluţia a ecuaţiei cuasiliniare (3.22) în forma $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. ■

Conform Teoremei 3.2.1, urmează că trebuie să determinăm n integrale prime ale sistemului caracteristic

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}},$$

ataşat ecuaţiei (3.24), anume

$$\begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_0, \\ \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_1, \\ \ldots & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) &= C_{n-1}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Atunci, soluţia generală a ecuaţiei (3.22) este funcţia definită implicit de

$$\Phi(\psi_0, \psi_1, \psi_2 \cdots, \psi_{n-1}) = 0, \tag{3.28}$$

Φ fiind o funcţie arbitrară derivabilă şi cu derivate parţiale de ordinul întâi continue.

Exerciţiul 3.2.1 *Să se determine integrala generală a ecuaţiei cuasiliniare*

$$xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 + y^2)z.$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat acestei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întâi este

$$\frac{dx}{x^2y} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{(x^2 + y^2)z}.$$

Din primele două rapoarte obţinem ecuaţia $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x}$ care ne conduce la integrala primă $x^2 - y^2 = C_0$.

O a doua integrală primă se obţine din combinaţia

$$\frac{ydx + xdy}{xy^3 + x^3y} = \frac{dz}{(x^2 + y^2)z}.$$

Primul raport al acestei combinaţii se obţine din primele două rapoarte ale sistemului caracteristic prin înmulţirea lor cu respectiv x şi y urmată de adunarea lor. Se obţine un nou raport egal cu celelalte rapoarte ale sistemului caracteristic. După înmulţirea cu $x^2 + y^2$ se obţine

$$\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dz}{z},$$

iar de aici rezultă a doua integrală primă $\dfrac{z}{xy} = C_1$.

Conform Teoremei 3.2.1, soluţia generală a ecuaţiei date este funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $\Phi(\psi_1, \psi_2) = 0$, unde Φ este o funcţie arbitrară. Având în vedere expresiile lui ψ_1 şi ψ_2, avem că soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale cuasiliniară este funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia

$$\Phi(x^2 - y^2, \frac{z}{xy}) = 0.$$

Se constată că soluţia generală se poate scrie în forma $z = xy\Psi(x^2 - y^2)$, unde Ψ este o funcţie reală arbitrară de o variabilă reală, derivabilă şi cu derivată continuă. ■

Exerciţiul 3.2.2 *Să se integreze ecuaţia cuasiliniară*

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = z + \frac{x_1x_2\cdots x_n}{z}.$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat acestei ecuaţii este

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{zdz}{z^2 + x_1x_2\cdots x_n}.$$

Se observă că avem următoarele combinaţii integrabile:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_3}{x_3}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_n}{x_n}$$

şi

$$\frac{d(x_1x_2\cdots x_n)}{n\,x_1x_2\cdots x_n} = \frac{zdz}{z^2 + x_1x_2\cdots x_n}. \tag{3.29}$$

Din integrarea primelor $n-1$ combinaţii integrabile obţinem integralele prime

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = C_2, \quad \ldots \quad \frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}.$$

Pentru a integra ultima combinaţie integrabilă notăm:

$$x_1x_2\cdots x_n = v; \quad z^2 = u.$$

Astfel, combinaţia integrabilă (3.29) se reduce la

$$\frac{du}{dv} - \frac{2}{nv}\,u = \frac{2}{n}.$$

Aceasta este o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi liniară şi neomogenă şi integrala ei generală este

$$u = C_n\sqrt[n]{v^2} + \frac{2v}{n-2}$$

sau, dacă revenim la vechile variabile,

$$(n-2)z^2 = C_n(n-2)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^2} + 2x_1x_2\cdots x_n.$$

Integrala generală a ecuaţiei date este funcţia z definită implicit de

$$(n-2)z^2 = 2x_1x_2\cdots x_n + (n-2)\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^2}\,\Phi\Big(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\Big),$$

unde Φ este o funcţie diferenţiabilă arbitrară. ■

Exerciţiul 3.2.3 *Să se determine soluţia generală a ecuaţiei*

$$(xy^3 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3).$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat ecuaţiei este :

$$\frac{dx}{x(y^3 - 2x^3)} = \frac{dy}{y(2y^3 - x^3)} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}.$$

Considerând primele două rapoarte se obţine o ecuaţie diferenţială omogenă care integrată conduce la integrala primă

$$\frac{y^3 + x^3}{y^2 x^2} = C_0.$$

O a doua integrală primă se obţine din combinaţia integrabilă

$$\frac{ydx + xdy}{3xy^4 - 3x^4 y} = \frac{dz}{9z(x^3 - y^3)}.$$

Simplificând, obţinem ecuaţia cu variabile separate $\dfrac{d(xy)}{xy} + \dfrac{dz}{3z} = 0$ care prin integrare conduce la a doua integrală primă $x^3 y^3 z = C_1$.

Soluţia generală a ecuaţiei este

$$z = \frac{1}{x^3 y^3}\, \Phi\Big(\frac{x^3 + y^3}{x^2 y^2}\Big)$$

unde Φ este o funcţie derivabilă arbitrară. ■

3.2.2 Problema lui Cauchy

Fie ecuaţia cu derivate parţiale cuasiliniară (3.22) şi punctul arbitrar, dar fixat, $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0) \in D$.

Definiţia 3.2.2 *Problema determinării unei soluţii u a ecuaţiei* (3.22) *într–o vecinătate U a punctului $M_0 \in D$, care pentru $x_n = x_{n0}$ să se reducă la funcţia continuă şi cu derivate parţiale continue $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, adică*

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{3.30}$$

se numeşte **problema lui Cauchy** *a ecuaţiei* (3.22).

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy vom considera că s–au determinat n integrale prime independente funcţional într–o vecinătate a lui M_0, iar dacă presupunem că aceste integrale prime sunt cele din (3.27), ele vor fi independente dacă

$$\frac{D(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u)}\Big|_{M_0} \neq 0. \tag{3.31}$$

Vom cere ca soluţia căutată $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să treacă prin punctul M_0, deci $u_0 = \varphi(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$.

Funcţia u, după cum am arătat la aliniatul precedent, este definită implicit de ecuaţia

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = \Phi(\psi_0, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0$$

şi problema se reduce la determinarea funcţiei Φ, adică a legăturii între integralele prime (3.27). În acelaşi timp u trebuie să fie unic determinată într–o vecinătate a punctului M_0, deci

$$\frac{\partial V}{\partial u}(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0) \neq 0.$$

Fie W o vecinătate a punctului M_0 în care sistemul (3.27) se poate inversa în funcţie de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$. Vom face însă inversarea după ce vom înlocui pe x_n cu x_{n0}, obţinând astfel sistemul

$$\begin{cases} \psi_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) & = & C_0, \\ \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) & = & C_1, \\ \ldots & & \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) & = & C_{n-1}. \end{cases} \tag{3.32}$$

Prin rezolvarea sistemului (3.32) în privinţa variabilelor menţionate, găsim

$$\begin{cases} u & = & \omega_0(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ x_1 & = & \omega_1(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}), \\ \ldots, & & \\ x_{n-1} & = & \omega_{n-1}(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}). \end{cases} \tag{3.33}$$

Teorema 3.2.2 *Soluţia problemei lui Cauchy pentru ecuaţia* (3.22) *care îndeplineşte condiţia iniţială* (3.30) *este funcţia u definită implicit de ecuaţia*

$$\omega_0(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}) - \psi[\omega_1(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_0, \ldots, \psi_{n-1})] = 0, \tag{3.34}$$

unde $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt integrale prime independente funcţional care satisfac condiţia (3.31).

Demonstraţie. Funcţia $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definită implicit de ecuaţia (3.34) este o soluţie a ecuaţiei (3.22) deoarece provine dintr–o relaţie de forma (3.28).

Funcţia u dată de (3.34) verifică condiţia iniţială (3.30) deoarece conform lui (3.32) şi (3.33) pentru $x_n = x_{n0}$ avem

$$\omega_0(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})\Big|_{x_n = x_{n0}} = u,$$

$$\omega_k(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Din (3.34) rezultă că pentru $x_n = x_{n0}$

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Big|_{x_n = x_{n0}} = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Derivata funcţiei V din membrul întâi al relaţiei (3.34), în raport cu u, în punctul M_0, se găseşte că este egală cu 1, deci diferită de zero.

Prin urmare, sunt satisfăcute toate ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate a unei funcţii reale de mai multe variabile reale definită implicit de ecuaţia (3.34), deci funcţia $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ există şi este unică. ■

Exerciţiul 3.2.4 *Să se găsească suprafaţa integrală a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul întâi liniară şi neomogenă*

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

care trece prin curba

$$(C_a): \begin{cases} x = a, \\ 2ayz = a^2 + 2. \end{cases} \tag{3.35}$$

Soluţie. Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y^2} = \frac{dz}{x}. \tag{3.36}$$

Considerând primele două rapoarte, obţinem combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

din care obţinem integrala primă a sistemului $xy = C_0$.

Amplificând în sistemul (3.36) primul raport cu y, al doilea cu x şi raportul al treilea cu y^2, obţinem

$$\frac{ydx}{xy^2} = -\frac{xdy}{xy^2} = \frac{y^2dz}{xy^2}. \tag{3.37}$$

Aceste trei rapoarte având acelaşi numitor, rezultă

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1}.$$

Folosind proprietăţile rapoartelor egale, deducem

$$\frac{ydx}{1} = \frac{-xdy}{1} = \frac{y^2dz}{1} = \frac{ydx - xdy}{2},$$

ultima egalitate fiind o combinaţie integrabilă căci se poate scrie în forma $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(2z)$.

Integrând ultima combinaţie integrabilă, obţinem a doua integrală primă a sistemului (3.36)

$$2z - \frac{x}{y} = C_1.$$

Integrala generală a ecuaţiei este funcţia $z = z(x, y)$ definită implicit de ecuaţia $F(x, y, z) = 0$, unde

$$F(x, y, z) = \Phi(C_0, C_1) = \Phi(xy, 2z - \frac{x}{y}).$$

Observăm că integrala generală se mai poate scrie ca

$$z = \frac{x}{2y} + f(xy),$$

unde f este o funcţie reală de variabilă reală, arbitrară.

Ansamblul ecuaţiilor celor două integrale prime formează ecuaţiile unei curbe caracteristice (C) situată pe suprafaţa integrală (S).

Suprafaţa integrală căutată (S_a) se obţine eliminând pe x, y, z în sistemul format de ecuaţiile celor două integrale prime şi ecuaţiile curbei (C_a). Efectuând această eliminare, rezultă:

$$C_1 = \frac{2}{C_0} \implies z - \frac{x}{2y} = \frac{1}{xy} \implies (S_a) \quad 2xyz - x^2 = 2$$

şi deci (S_a) este o suprafaţă algebrică de ordinul al treilea. ■

Exerciţiul 3.2.5 *Fie ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul întâi cuasiliniară*

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Să se determine soluţia sa generală şi să se rezolve problema lui Cauchy cu condiţia iniţială

$$z(2,y) = 1 + y^2 \iff \begin{cases} x = 2, \\ z = 1 + y^2. \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul caracteristic asociat este $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z - xy}$. Din primele două rapoarte se obţine integrala primă $\dfrac{x}{y} = C_0$.

Înmulţind primul raport cu y, al doilea cu x şi efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor, găsim un nou raport egal cu oricare din cele trei. Egalându–l cu primul raport, obţinem combinaţia integrabilă

$$\frac{d(xy+z)}{xy+z} = \frac{dx}{x}.$$

Integrând, obţinem a doua integrala primă $y + \dfrac{z}{x} = C_1$.

Rezultă că soluţia generală este funcţia definită implicit de ecuaţia

$$\Phi\Big(\frac{x}{y}, y + \frac{z}{x}\Big) = 0,$$

unde Φ este o funcţie arbitrară derivabilă şi cu derivate continue.

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy trebuie să rezolvăm mai întâi sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y} = C_0, \\ y + \dfrac{z}{2} = C_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = 2\Big(C_1 - \dfrac{2}{C_0}\Big) = \omega_0(C_0, C_1), \\ y = \dfrac{2}{C_0} = \omega_1(C_0, C_1). \end{cases}$$

Înlocuind pe y şi z în $z = 1 + y^2$ găsim relaţia care corespunde lui (3.34)

$$2\Big(C_1 - \frac{2}{C_0}\Big) - 1 - \frac{4}{C_0^2} = 0.$$

Dacă se înlocuiesc C_0 şi C_1 cu respectiv

$$\psi_0(x,y,z) = \frac{y}{x}, \quad \psi_1(x,y,z) = y + \frac{z}{x},$$

deducem că soluţia problemei lui Cauchy este funcţia $z = \dfrac{(x+2y)^2}{2x} - xy$.

După eliminarea numitorului, observăm că din punct de vedere geometric soluţia determinată reprezintă o suprafaţă algebrică de ordinul al treilea din care se scot intersecţiile acesteia cu planul Oyz. ■

Exercițiul 3.2.6 *Să se determine suprafața integrală a ecuației diferențiale cu derivate parțiale de ordinul întâi cuasiliniară neomogenă*

$$(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$$

care conține dreapta (d) *de ecuații* $x=y=z$.

Soluție. Sistemul caracteristic asociat ecuației diferențiale date este

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}, \tag{3.38}$$

căruia trebuie să–i determinăm două integrale prime funcțional independente. Pentru aceasta, căutăm combinații integrabile ale rapoartelor egale. Se observă că acestea sunt egale cu încă două

$$\frac{dx}{y-z}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{x-y}=\frac{dx+dy+dz}{0}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0},$$

obținute efectuând suma numărătorilor pe suma numitorilor (penultimul raport) și suma numărătorilor pe suma numitorilor celor trei rapoarte din (3.38), înmulțite în prealabil cu x, y și respectiv z.

Când într–o succesiune de rapoarte egale numitorul unui raport este zero, numărătorul acelui raport trebuie să fie, de asemenea, zero. Prin urmare,

$$dx+dy+dz=0,\quad xdx+ydy+zdz=0.$$

Din aceste egalități se obțin cele două integrale prime independente funcțional ale sistemului simetric (3.38)

$$x+y+z=C_1,\quad x^2+y^2+z^2=C_2. \tag{3.39}$$

Geometric, prima integrală primă reprezintă un fascicol de plane paralele de normală $\mathbf{N}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, iar cea de a doua este o familie de sfere concentrice cu centrul în originea reperului.

Soluția generală a sistemului simetric (3.38) este ansamblul celor două integrale prime care, din punct de vedere geometric, reprezintă o familie dublu parametrică de cercuri în spațiu, care sunt curbele caracteristice.

Pentru a determina suprafața integrală care conține dreapta (d), impunem condiția ca sistemul format de ecuațiile curbelor caracteristice și ecuațiile dreptei să fie compatibil, ceea ce conduce la *relația de compatibilitate* $C_1^2-3C_2=0$.

Înlocuind C_1 și C_2 în relația de compatibilitate cu expresiile lor din (3.39) se găsește că suprafața integrală căutată este conul pătratic (eliptic) cu vârful în origine de ecuație $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$. ■

Capitolul 4

Elemente de teoria câmpurilor

4.1 Câmpuri scalare. Curbe şi suprafeţe de nivel

Fie $D \subset I\!R^3$ un domeniu tridimensional, $M(x, y, z)$ un punct oarecare din D şi $f \in \mathcal{F}(D)$ o funcţie reală definită pe D. Valorile funcţiei f, scrise în forma $f(M)$, sau în forma $f(\mathbf{x}) = f(x, y, z)$, unde $\mathbf{x} = (x, y, z) \in D$, sunt numere reale sau *scalari*. Astfel, funcţia f se mai numeşte şi *funcţie scalară*.

Definiţia 4.1.1 *Funcţia scalară $f \in \mathcal{F}(D)$, $D \subset I\!R^3$, se numeşte* **câmp scalar tridimensional**.

Dacă domeniul D este bidimensional, deci $D \subset I\!R^2$, sau D este o porţiune de suprafaţă mărginită de o curbă în spaţiu, poziţia punctului $M \in D$ va fi determinată de doi parametri (coordonatele carteziene x şi y ale punctului din plan în primul caz, sau coordonatele curbilinii u şi v ale punctului situat pe o suprafaţă în cel de al doilea caz). După caz, vom scrie: $f(M) = f(x, y)$; $f(M) = f(u, v)$. În ambele cazuri, funcţia scalară $f \in \mathcal{F}(D)$ se numeşte *câmp scalar bidimensional*.

În cele ce urmează vom presupune că funcţia f este continuă pe D şi admite derivate parţiale de orice ordin continue în D.

Exemplul 4.1.1 *Câmpul temperaturilor $T = T(M)$ într–o regiune tridimensională sau bidimensională şi câmpul presiunilor $p = p(M)$ într–un domeniu plan sau spaţial sunt exemple de câmpuri scalare.*

Exemplul 4.1.2 *Funcţia reală de două variabile reale*

$$f: I\!R^2 \to I\!R, \quad f(M) = f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a, b \in I\!R_+^*, \tag{4.1}$$

este un câmp scalar bidimensional.

Exemplul 4.1.3 *Funcţia reală de trei variabile reale*

$$f: I\!R^3 \to I\!R, \quad f(M) = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{4.2}$$

este un câmp scalar definit în întreg spaţiu tridimensional.

Fie câmpul scalar $f(M)$, $M \in D \subset I\!R^3$ şi $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$, fixat.

Definiţia 4.1.2 *Se numeşte* **suprafaţă de nivel care trece prin** M_0 *a câmpului scalar tridimensional* $f(M)$*, locul geometric* S_0 *al punctelor* $M \in D$ *cu proprietatea*

$$f(M) = f(M_0) \tag{4.3}$$

sau, având în vedere coordonatele carteziene ale punctelor M *şi* M_0*,*

$$f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0). \tag{4.4}$$

Deoarece M_0 este un punct al suprafeţei de nivel S_0, ecuaţia acesteia este (4.3) sau (4.4).

Observaţia 4.1.1 *Prin orice punct* $M_0 \in D$ *trece o suprafaţă de nivel a câmpului scalar tridimensional* $f \in \mathcal{F}(D)$*, iar orice două suprafeţe de nivel ale sale ori sunt identice, ori nu au nici un punct comun.*

Exemplul 4.1.4 *Suprafeţele de nivel ale câmpului termic dintr–o regiune tridimensională sunt* **izotermele***; cele ale câmpului presiunilor sunt* **izobarele***; suprafeţele de nivel ale câmpului scalar* (4.2) *sunt sfere cu centrele în origine.*

Definiţia 4.1.3 *Prin* **curbă de nivel** *a câmpului scalar bidimensional* $f \in \mathcal{F}(D)$*,* $D \subset I\!R^2$ *(sau* $D \subset \Sigma$*, unde* Σ *este o suprafaţă), se înţelege locul geometric al punctelor* $M(x,y) \in D$ *(sau* $M(u,v) \in D \subset \Sigma$*) cu proprietatea*

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) \quad (f(u,v) = f(u_0, v_0)), \tag{4.5}$$

unde $M_0(x_0, y_0)$*, respectiv* $M_0(u_0, v_0)$*, sunt puncte oarecare, dar fixate, din* D*.*

Observaţia 4.1.2 *Prin orice punct $M_0 \in D$ trece câte o curbă de nivel şi oricare două asemenea curbe sau coincid, sau nu au puncte comune.*

Exemplul 4.1.5 *Curbele de nivel ale câmpului scalar* (4.1) *sunt elipse omofocale, cu centrul de simetrie în origine, care au axele de coordonate ca axe de simetrie şi semiaxele* $a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}}$ *şi* $b\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}}$.

O primă imagine a unui câmp scalar este dată de suprafeţele (curbele) sale de nivel care arată modul cum sunt stratificate valorile câmpului, viteza de stratificare într–un punct fiind tocmai derivata după o direcţie oarecare de versor $\mathbf{s}$ a câmpului în punctul considerat.

4.2 Derivata după o direcţie şi gradientul unui câmp scalar

Să considerăm câmpul scalar $f \in \mathcal{F}(D)$, $\mathbf{s}$ un versor arbitrar şi, pentru fiecare punct $\mathbf{x} \in D$, definim funcţia reală g de variabila reală t

$$g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{s}), \quad t \in I, \quad \mathbf{x} + t\mathbf{s} \in D, \tag{4.6}$$

I este un interval real.

Evident, avem o infinitate de funcţii g (pentru fiecare $\mathbf{x} \in D$ există o asemenea funcţie) şi pentru toate, avem $g(0) = f(\mathbf{x})$. Funcţiile g sunt restricţiile funcţiei f la dreapta care trece prin $\mathbf{x}$ şi are direcţia $\mathbf{s}$.

Presupunem că, pentru orice $\mathbf{x} \in D$, funcţia g corespunzătoare este derivabilă în $t = 0$.

Definiţia 4.2.1 *Spunem că funcţia f este* **derivabilă în D după direcţia $\mathbf{s}$** *dacă funcţiile g, definite în* (4.6), *sunt derivabile în $t = 0$.*

Definiţia 4.2.2 *Dacă f este derivabilă în D după direcţia* $\mathbf{s}$, *numărul real $g'(0)$ se numeşte* **derivata câmpului scalar f, după direcţia $\mathbf{s}$, în punctul $\mathbf{x} \in D$.**

Notăm această derivată cu $\dfrac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})$. Prin urmare,

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = g'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{s})-f(\mathbf{x})}{t}. \tag{4.7}$$

Definiţia 4.2.3 *Funcţia* $\dfrac{df}{d\mathbf{s}} \in \mathcal{F}(D)$ *ale cărei valori se determină după legea* (4.7), *se numeşte* **derivata câmpului scalar** f **după direcţia** $\mathbf{s}$.

Observaţia 4.2.1 *Fiind definite cu ajutorul derivatelor unei funcţii reale de o variabilă reală, proprietăţile derivatelor după o direcţie ale câmpurilor scalare sunt aceleaşi ca acele ale derivatelor funcţiilor reale de o variabilă reală.*

În consecinţă, putem scrie (pentru simplificare, omitem variabila $\mathbf{x}$):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \dfrac{df_1}{d\mathbf{s}} + \lambda_2 \dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}; \\[2ex] \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(f_1 \cdot f_2) = \dfrac{df_1}{d\mathbf{s}} \cdot f_2 + f_1 \cdot \dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}; \\[2ex] \dfrac{d}{d\mathbf{s}}\Big(\dfrac{f_1}{f_2}\Big) = \dfrac{\dfrac{df_1}{d\mathbf{s}} \cdot f_2 - f_1 \cdot \dfrac{df_2}{d\mathbf{s}}}{f_2^2}; \\[2ex] \dfrac{d}{d\mathbf{s}}(F(f)) = F'(f) \cdot \dfrac{df}{d\mathbf{s}}, \end{cases} \tag{4.8}$$

unde f_1, f_2 şi f sunt câmpuri scalare derivabile în D după direcţia $\mathbf{s}$, iar $F(f) = F \circ f$ este compusa funcţiei f cu funcţia F.

Deoarece am presupus că funcţia f care defineşte un câmp scalar are derivate parţiale continue în D, rezultă că f este diferenţiabilă în D şi valoarea în $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3) \in I\!R^3$ a diferenţialei funcţiei f în punctul $\mathbf{x} \in D$ este

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}, \tag{4.9}$$

unde

$$(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\,\mathbf{k} \tag{4.10}$$

este *gradientul* funcţiei f în punctul $\mathbf{x} \in D$. Între gradientul funcţiei f şi vectorul $\mathbf{h}$ se efectuează produsul scalar standard

$$df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\,h_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\,h_3. \tag{4.11}$$

Operatorul diferenţial $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ se numeşte *operatorul lui Hamilton* sau *operatorul nabla.*

Pe de altă parte, se ştie că dacă f este diferenţiabilă în D, atunci f este derivabilă în D după orice direcţie şi derivata sa după direcţia $\mathbf{s}$ într–un punct $\mathbf{x} \in D$ este valoarea în $\mathbf{s}$ a diferenţialei funcţiei f în punctul $\mathbf{x}$. Prin urmare,

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = df(\mathbf{x})(\mathbf{s}). \tag{4.12}$$

Din (4.9) şi (4.12) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{s}, \tag{4.13}$$

iar din (4.10) şi (4.13) rezultă

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\, s_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\, s_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\, s_3. \tag{4.14}$$

Fie P punctul din D al cărui vector de poziţie este $\mathbf{x} + t\mathbf{s}$. Conform Observaţiei 4.1.1, prin punctul P trece o suprafaţă de nivel (S) a câmpului scalar f. Dreapta (d) care trece prin M şi are direcţia $\mathbf{s}$, intersectează suprafaţa (S) în punctul P. Astfel, t este abscisa curbilinie a punctului P de pe dreapta (d) pe care M este originea elementului de arc. Dacă notăm cu $t = \ell(MP)$ lungimea arcului MP, formula (4.7) se rescrie în forma

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{\ell(MP)\to 0\\ P\in(d)}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}. \tag{4.15}$$

Considerăm acum că punctul $P \in (S)$ nu este pe dreapta (d) ci pe o curbă netedă arbitrară Γ care trece prin M şi are versorul tangentei în M identic cu $\mathbf{s}$.

Definiţia 4.2.4 *Se numeşte* **variaţie medie** *a câmpului scalar f, raportul*

$$\frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)}, \tag{4.16}$$

unde $P \in \Gamma \cap (S)$ iar $\ell(MP)$ este abscisa curbilinie a punctului P.

Teorema 4.2.1 *Limita variaţiei medii* (4.16) *a câmpului scalar f atunci când P tinde, pe curba Γ, la punctul $M(\mathbf{x})$, este egală cu derivata în $\mathbf{x}$ după direcţia $\mathbf{s}$ a câmpului scalar f.*

Demonstraţie. Evaluarea diferenţei de la numărătorul variaţiei medii, conduce la

$$f(P) - f(M) = (\nabla f)(\mathbf{x}) \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}), \tag{4.17}$$

unde $\boldsymbol{\varepsilon}$ este o funcţie vectorială de variabilă vectorială cu proprietatea

$$\lim_{P \to M} \boldsymbol{\varepsilon} = 0, \tag{4.18}$$

cu menţiunea că punctul P, în acest proces de trecere la limită, se află pe curba Γ.

Dacă împărţim (4.17) prin $\ell(MP)$, trecem la limită pentru $P \to M$ ceea ce este echivalent cu $\ell(MP) \to 0$, ţinem cont de (4.18), (4.14) şi de rezultatul

$$\lim_{\substack{\ell(MP)\to 0\\ P\in\Gamma}} \frac{\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}}{\ell(MP)} = \mathbf{s},$$

din geometria diferenţială, se deduce

$$\lim_{\substack{\ell(MP)\to 0\\ P\in\Gamma}} \frac{f(P) - f(M)}{\ell(MP)} = \frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \tag{4.19}$$

ceea ce demonstrează teorema. ■

Observaţia 4.2.2 *Relaţia* (4.19) *se poate lua ca definiţie pentru derivata după direcţia* $\mathbf{s}$ *a câmpului scalar* f *în punctul* $\mathbf{x} \in D$.

Ne propunem să determinăm acea direcţie a spaţiului după care derivata câmpului scalar f în punctul $\mathbf{x}$ este maximă.

Ţinând cont că produsul scalar a doi vectori din $I\!R^3$ este egal cu produsul dintre normele vectorilor şi cosinusul unghiului θ dintre ei şi că $\|\mathbf{s}\| = 1$, din (4.13) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \|(\nabla f)(\mathbf{x})\| \cdot \cos\theta. \tag{4.20}$$

Din (4.20) se vede că derivata este maximă când $\theta = 0$, adică atunci când versorul $\mathbf{s}$ este versorul $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ al vectorului $(\nabla f)(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{(\nabla f)(\mathbf{x})}{\|(\nabla f)(\mathbf{x})\|}. \tag{4.21}$$

Pentru a demonstra o proprietate remarcabilă a versorului (4.21) să presupunem că M este fixat şi notat cu M_0 şi că vectorul său de poziţie este

$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Fie $\gamma_0 \subset (S_0)$ o curbă netedă arbitrară care trece prin M_0 şi care are tangenta $\mathbf{t}_0$ în M_0. Dacă $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$ sunt ecuaţiile parametrice ale curbei γ_0 şi punctul M_0 corespunde lui t_0 pe curba γ_0, atunci

$$\mathbf{t}_0 = \frac{d\varphi}{dt}(t_0)\,\mathbf{i} + \frac{d\psi}{dt}(t_0)\,\mathbf{j} + \frac{d\chi}{dt}(t_0)\,\mathbf{k}. \tag{4.22}$$

Cum curba γ_0 este situată pe (S_0), unde (S_0) este suprafaţa de nivel care trece prin M_0 de ecuaţie $f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$, avem

$$f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) = f(x_0, y_0, z_0). \tag{4.23}$$

Dacă derivăm (4.23) ca o funcţie compusă şi considerăm $t = t_0$, deducem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\,\frac{d\varphi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\,\frac{d\psi}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_0)\,\frac{d\chi}{dt}(t_0) = 0. \tag{4.24}$$

Din (4.10), (4.21), (4.22) şi (4.24), obţinem

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{t}_0 = 0,$$

care demonstrează că $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este ortogonal tuturor tangentelor la respectiv toate curbele $\gamma_0 \subset (S_0)$ care trec prin M_0. Cum locul geometric al acestor tangente este planul tangent în M_0 la suprafaţa (S_0), rezultă că $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este versorul normalei în M_0 la suprafaţa de nivel (S_0). Sensul versorului $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ este spre acea parte a spaţiului în care $f(x,y,z) > f(x_0,y_0,z_0)$. Aşadar:

Teorema 4.2.2 *Derivata câmpului scalar f după direcţia $\mathbf{s}$ în punctul $\mathbf{x}_0$ este maximă după direcţia versorului $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$ a normalei în M_0 la suprafaţa de nivel (S_0) care trece prin M_0, sensul normalei fiind sensul creşterii valorilor câmpului scalar f.*

Revenind la un punct arbitrar $\mathbf{x} \in D$, obţinem că derivata după direcţia normalei $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ în punctul M la suprafaţa de nivel care trece prin M are expresia

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{4.25}$$

Cu ajutorul lui (4.21), din (4.25) deducem

$$\frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \|(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x})\|. \tag{4.26}$$

Cum gradientul câmpului scalar f în punctul $\mathbf{x}$ este coliniar şi de acelaşi sens cu $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, din (4.26) obţinem

$$(\boldsymbol{\nabla} f)(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x}). \tag{4.27}$$

Să mai observăm că folosind (4.20) şi (4.25) putem scrie

$$\frac{df}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{df}{d\mathbf{n}}(\mathbf{x})\cos\theta, \tag{4.28}$$

unde θ este unghiul dintre versorii **s** şi **n**.

Formula (4.28) dă legătura între derivata după un versor oarecare **s** şi derivata după direcţia normalei în punctul M la suprafaţa de nivel care trece prin M, ocazie cu care reîntâlnim concluzia Teoremei 4.2.2.

Din (4.27) deducem că regulile de calcul pentru gradient sunt aceleaşi cu regulile de calcul ale derivatei după o direcţie. Dacă avem în vedere (4.8) şi renunţăm la scrierea variabilei vectoriale **x**, se pot scrie relaţiile:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\boldsymbol{\nabla}\varphi + \mu\boldsymbol{\nabla}\psi; \\ \boldsymbol{\nabla}(\varphi\psi) = \psi\boldsymbol{\nabla}\varphi + \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi; \\ \boldsymbol{\nabla}\Big(\dfrac{\varphi}{\psi}\Big) = \dfrac{\psi\boldsymbol{\nabla}\varphi - \varphi\boldsymbol{\nabla}\psi}{\psi^2}; \\ \boldsymbol{\nabla}F(\varphi) = F'(\varphi)\boldsymbol{\nabla}\varphi. \end{cases} \tag{4.29}$$

Mai precizăm că pentru gradientul câmpului scalar φ se folosoşte şi notaţia $\operatorname{grad}\varphi$.

Exerciţiul 4.2.1 *Se dă câmpul scalar*

$$\varphi(x,y,z) \quad = \quad \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^2},$$

unde

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Să se calculeze unghiul dintre vectorii $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A)$ *şi* $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B)$*, unde* A *şi* B *sunt puncte de coordonate* $A(2,1,1)$ *şi* $B(0,1,-1)$.

Soluţie. Dacă aplicăm regulile de calcul (4.29), găsim că gradientul câmpului scalar φ în punctul oarecare $M(x,y,z)$, diferit de originea reperului $Oxyz$, este

$$(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M) = -2\,\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}{r^4}\,\mathbf{r} + \frac{1}{r^2}\,\mathbf{a}$$

de unde rezultă $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A) = -\dfrac{1}{18}(2\,\mathbf{i}+\mathbf{j}+7\,\mathbf{k})$ şi $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B) = \dfrac{1}{2}(2\,\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})$. Cum cosinusul unghiului θ dintre doi vectori este raportul dintre produsul scalar al lor şi produsul normelor acestora, obţinem

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B)}{\|(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(A)\|\,\|(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(B)\|} = -\frac{5}{9}.$$

Semnul minus dovedeşte că unghiul dintre cei doi gradienţi este obtuz.■

Exerciţiul 4.2.2 *Fie câmpul scalar* $\varphi(x,y,z) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2 + (\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2$, *unde* $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ *este vectorul de poziţie al punctului* $M(x,y,z)$, *iar* $\mathbf{a}$ *este un versor constant.*

a) Să se determine suprafaţa de nivel care trece prin $M_0(1,2,3)$.

b) Să se calculeze derivata câmpului scalar φ *după direcţia de parametri directori* $(2,-1,2)$ *în punctul* M_0.

Soluţie. Deoarece $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2 = a^2r^2\cos^2\theta$ şi $(\mathbf{a}\times\mathbf{r})^2 = a^2r^2\sin^2\theta$, iar $a^2 = 1$, deducem că valorile câmpului scalar sunt $\varphi(x,y,z) = r^2 = x^2+y^2+z^2$.

a) Suprafaţa de nivel care trece prin $M_0(1,2,3)$ este $x^2+y^2+z^2 = 14$, adică sfera de rază $R = \sqrt{14}$ şi cu centrul în origine.

b) Versorul $\mathbf{s}$ al vectorului $\mathbf{v}$ de parametri directori $(2,-1,2)$ este

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Gradientul câmpului scalar φ în punctul M_0 este

$$(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M) = (\operatorname{grad}\varphi)(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k},$$

de unde

$$(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M_0) = (\operatorname{grad}\varphi)(1,2,3) = 2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}).$$

Derivata funcţiei φ în punctul M_0 după direcţia $\mathbf{s}$ este

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{s}}(M_0) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M_0)\cdot\mathbf{s} = 2(\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k})\cdot\frac{1}{3}(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}(2-2+6) = 4.$$

Rezultă că unghiul θ dintre vectorii $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M_0)$ şi $\mathbf{s}$ este ascuţit. ■

4.3 Câmpuri vectoriale. Linii şi suprafeţe de câmp

Definiţia 4.3.1 *Se numeşte* **câmp vectorial** *o funcţie vectorială de variabilă vectorială definită pe un domeniu* $D \subset I\!R^3$.

Funcţia vectorială $\mathbf{v}$ care defineşte un câmp vectorial pe $D \subset I\!R^3$ se poate scrie în una din formele:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(P); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z), \tag{4.30}$$

unde $\mathbf{r}$ este vectorul de poziţie al punctului $P \in D$, care, în reperul $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, are expresia analitică

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \tag{4.31}$$

unde O este originea reperului, iar $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ este o bază ortonormată în $I\!R^3$.

Notând

$$\mathbf{v} = v_1\,\mathbf{i} + v_2\,\mathbf{j} + v_3\,\mathbf{k}, \tag{4.32}$$

unde $v_m = v_m(x, y, z),\ \ m = 1, 2, 3$, observăm că studiul unei funcţii vectoriale de trei variabile reale (sau de variabilă vectorială), adică a unui câmp vectorial, se reduce la studiul a trei funcţii reale de trei variabile reale (a trei câmpuri scalare tridimensionale).

În cele ce urmează, vom presupune că funcţia vectorială care defineşte un câmp vectorial pe domeniul tridimensional D este continuă, are derivate parţiale continue în D care nu se anulează în nici un punct din D.

Definiţia 4.3.2 *Se numeşte* **linie de câmp în** D **a câmpului vectorial** $\mathbf{v}$, *o curbă strâmbă* $(L) \subset D$ *cu proprietatea că tangenta în fiecare punct* $P \in (L)$ *are ca vector director pe* $\mathbf{v}(P)$.

Cum un alt vector director al tangentei în punctul $P(x, y, z) \in (L)$ este diferenţiala vectorului de poziţie (4.31)

$$d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dy\,\mathbf{k} \tag{4.33}$$

avem că $\mathbf{v}$ şi $d\mathbf{r}$ sunt vectori directori ai aceleiaşi drepte, adică ei sunt coliniari.

În concluzie, coordonatele acestor doi vectori directori trebuie să fie proporţionale şi deci

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}. \tag{4.34}$$

Definiţia 4.3.3 *Sistemul simetric* (4.34) *se numeşte* **sistemul diferenţial al liniilor de câmp** *în* D *a câmpului vectorial* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$.

Observaţia 4.3.1 *În baza teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei unui sistem simetric, rezultă că prin orice punct al domeniului* D *trece câte o singură linie de câmp a câmpului vectorial* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$.

Definiţia 4.3.4 *Se numeşte* **suprafaţă de câmp** *a unui câmp vectorial, orice suprafaţă generată de o linie de câmp a acelui câmp vectorial.*

Teorema 4.3.1 *Condiţia necesară şi suficientă ca o suprafaţă* (S) *să fie suprafaţă de câmp a câmpului vectorial* $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ *este ca vectorul* $\mathbf{v}(P)$ *să fie conţinut în planul tangent la suprafaţa* (S) *în punctul* $P \in (S)$.

Demonstraţie. Necesitatea. O linie de câmp (G) a câmpului vectorial $\mathbf{v}$ este ansamblul a două integrale prime independente funcţional ale sistemului simetric (4.34)

$$(G)\quad \begin{cases} \psi_1(x,y,z) = C_1 \\ \\ \psi_2(x,y,z) = C_2, \end{cases} \tag{4.35}$$

unde ψ_1, ψ_2 sunt două integrale prime independente funcţional, ceea ce se traduce prin condiţia

$$\Big(\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(y,z)}\Big)^2 + \Big(\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(z,x)}\Big)^2 + \Big(\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(x,y)}\Big)^2 \neq 0.$$

Se ştie apoi că, pentru ca (G) din (4.35) să genereze o suprafaţă, parametrii C_1 şi C_2 trebuie să fie legaţi printr–o relaţie de forma

$$\Phi(C_1, C_2) = 0, \tag{4.36}$$

numită *relaţie de condiţie* şi că, suprafaţa de câmp corespunzătoare condiţiei (4.36) se obţine eliminând constantele arbitrare C_1 şi C_2 între (4.35) şi (4.36). Obţinem

$$\Phi(\psi_1(x,y,z), \psi_2(x,y,z)) = 0, \tag{4.37}$$

deci o ecuaţie de forma

$$(S): \quad F(x,y,z) = 0 \tag{4.38}$$

în care recunoaştem ecuaţia carteziană implicită a unei suprafeţe (S). În plus, în orice punct $P \in (S)$, vectorul $\mathbf{v}(P)$ este tangent suprafeţei de ecuaţie (4.37) şi deci conţinut în planul tangent în P la suprafaţa (S) deoarece

$\mathbf{v}(P)$ este tangent la linia de câmp care trece prin P şi generează suprafaţa (S).

Suficienţa. Trebuie să arătăm că orice suprafaţă (S) de ecuaţie (4.38) cu proprietatea că $\mathbf{v}(P)$ este conţinut în planul tangent în punctul P la (S) este generată de liniile de câmp ale câmpului vectorial $\mathbf{v}$.

Ecuaţia (4.38) poate fi considerată ca o suprafaţă de nivel a câmpului scalar F.

Se ştie că un vector coliniar şi de acelaşi sens cu sensul de creştere al funcţiei F în punctul $P(x, y, z) \in (S)$ este

$$(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\,\mathbf{k}. \tag{4.39}$$

Deoarece vectorul (4.39) este ortogonal vectorului $\mathbf{v}(\mathbf{P})$ conţinut în planul tangent în P la suprafaţa (S),rezultă că produsul lor scalar este nul, deci

$$\begin{aligned} v_1(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + v_2(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)+ \\ +v_3(x,y,z)\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 0, \end{aligned} \tag{4.40}$$

ceea ce arată că funcţia $F(x, y, z)$ din (4.38) verifică o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul întâi omogenă. Dar orice soluţie a ecuaţiei diferenţiale (4.40) este generată de curbele integrale ale sistemului caracteristic asociat, adică de (4.34), iar curbele caracteristice ale sale sunt liniile de câmp ale câmpului vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$. Teorema este demonstrată. ■

Definiţia 4.3.5 *Câmpul vectorial* $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$ *se numeşte* **biscalar** *dacă există funcţia scalară derivabilă* $\varphi \in \mathcal{F}(D)$ *şi funcţia diferenţiabilă* $F \in \mathcal{F}(D)$*, astfel încât să avem*

$$\mathbf{v} = \varphi\, grad\, F = \varphi \boldsymbol{\nabla} F. \tag{4.41}$$

Derivata după o direcţie $\mathbf{s}$ a unui câmp vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$ într–un punct $\mathbf{x} \in D$ se defineşte la fel ca la câmpurile scalare

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{x} + t\mathbf{s}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})}{t}. \tag{4.42}$$

Dacă funcţia $\mathbf{v}$ are derivate parţiale de ordinul întâi continue, existenţa limitei (4.42) este asigurată şi

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \frac{dv_1}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})\,\mathbf{i} + \frac{dv_2}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})\,\mathbf{j} + \frac{dv_3}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x})\,\mathbf{k}. \tag{4.43}$$

Dacă se ţine cont de (4.14), (4.43) devine

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = s_1\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}(\mathbf{x}) + s_2\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}(\mathbf{x}) + s_3\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}(\mathbf{x}). \tag{4.44}$$

Relaţia (4.44) constituie *expresia carteziană* a derivatei câmpului vectorial $\mathbf{v}$, în punctul $\mathbf{x} \in D$, după direcţia de versor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, expresie care se mai poate scrie în forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \Big(s_1\,\frac{\partial}{\partial x} + s_2\,\frac{\partial}{\partial y} + s_3\,\frac{\partial}{\partial z}\Big)\mathbf{v}. \tag{4.45}$$

Deoarece operatorul $s_1\,\dfrac{\partial}{\partial x} + s_2\,\dfrac{\partial}{\partial y} + s_3\,\dfrac{\partial}{\partial z}$ poate fi interpretat formal ca produsul scalar dintre $\mathbf{s}$ şi operatorul vectorial $\boldsymbol{\nabla}$, se poate adopta convenţia de scriere

$$\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nabla} = s_1\,\frac{\partial}{\partial x} + s_2\,\frac{\partial}{\partial y} + s_3\,\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.46}$$

Cu această convenţie şi cu renunţarea la menţionarea variabilei $\mathbf{x}$, formula de calcul (4.45) ia forma

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}} = (\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathbf{v}. \tag{4.47}$$

Exerciţiul 4.3.1 *Să se determine derivata câmpului vectorial* $\mathbf{v}$ *definit prin*

$$\mathbf{v}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + z(x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

după direcţia de parametri directori $(1, 3, -1)$. *Care este locul geometric al punctelor din spaţiu pentru care derivata după direcţia* $\mathbf{s}$ *este normală vectorului* $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$?

Soluţie. Să calculăm versorul direcţiei menţionate. Fiindcă norma vectorului $\mathbf{v}$ este $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{11}$, rezultă că versorul direcţiei după care trebuie să derivăm este $\mathbf{s} = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \dfrac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Folosind (4.47), găsim

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}} = \frac{1}{\sqrt{11}}\Big[(y^2 + 6xy)\mathbf{i} + (2xy + 3x^2)\mathbf{j} + (2xz + 6yz - x^2 - y^2)\mathbf{k}\Big].$$

Pentru a determina locul geometric cerut, impunem condiţia de ortogonalitate $\dfrac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{s}}\cdot\mathbf{v} = 0$ şi obţinem ecuaţia $x^2 + 4xy + xz + 3xz = 0$ ce reprezintă ecuaţia unei cuadrice (suprafaţă algebrică de ordinul al doilea).

Analizând invarianţii acestei cuadrice constatăm că locul geometric este un con pătratic cu vârful în origine. ∎

Exerciţiul 4.3.2 *Să se determine liniile de câmp ale câmpurilor vectoriale:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{1^0}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) &= x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathbf{k};\\
\mathbf{2^0}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) &= (xy-2z^2)\mathbf{i}+(4xz-y^2)\mathbf{j}+(yz-2x^2)\mathbf{k};\\
\mathbf{3^0}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) &= (xz-y)\mathbf{i}+(yz-x)\mathbf{j}+(z^2-1)\mathbf{k};\\
\mathbf{4^0}.\quad \mathbf{v}(x,y,z) &= (x+y)\mathbf{i}+(y-x)\mathbf{j}-2z\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Soluţie. Liniile de câmp sunt curbele integrale ale respectiv sistemelor simetrice:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1^0}.\quad \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\\
\mathbf{2^0}.\quad \frac{dx}{xy-2z^2} &= \frac{dy}{4xz-y^2} = \frac{dz}{yz-2x^2};\\
\mathbf{3^0}.\quad \frac{dx}{xz-y} &= \frac{dy}{yz-x} = \frac{dz}{z^2-1};\\
\mathbf{4^0}.\quad \frac{dx}{x+y} &= \frac{dy}{y-x} = \frac{dz}{-2z}.
\end{aligned}$$

Se obţin combinaţiile integrabile:

$$\mathbf{1^0}.\quad \frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\qquad xdx+ydy+(z-\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz=0;$$

$$\mathbf{2^0}.\quad ydx+xdy+2zdz=0,\qquad 2xdx+zdy+ydz=0;$$

$$\mathbf{3^0}.\quad \frac{dx-dy}{(x-y)(1+z)}=\frac{dz}{z^2-1},\qquad \frac{xdx-ydy}{(x^2-y^2)z}=\frac{dz}{z^2-1};$$

$$\mathbf{4^0}.\quad \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\frac{dz}{-2z},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$$

care conduc respectiv la integralele prime:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1^0}.\quad \frac{y}{x}=C_1, && z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}=C_2;\\
&\mathbf{2^0}.\quad z^2+xy=C_1, && x^2+yz=C_2;\\
&\mathbf{3^0}.\quad \frac{x-y}{z-1}=C_1, && \frac{x+y}{z+1}=C_2;\\
&\mathbf{4^0}.\quad (x^2+y^2)z=C_1, && \ln(x^2+y^2)+2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C_2.
\end{aligned}$$

Curbele integrale ale sistemelor simetrice de mai sus sunt:

$$\mathbf{1}^0.\begin{cases} \dfrac{y}{x} = C_1 \\ z - \sqrt{x^2+y^2+z^2} = C_2 \end{cases};\quad \mathbf{2}^0.\begin{cases} z^2+xy = C_1 \\ x^2+yz = C_2 \end{cases};$$

$$\mathbf{3}^0.\begin{cases} \dfrac{x-y}{z-1} = C_1 \\ \dfrac{x+y}{z+1} = C_2 \end{cases};\quad \mathbf{4}^0.\begin{cases} (x^2+y^2)z = C_1 \\ \ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C_2. \end{cases}$$

Primul câmp vectorial are liniile de câmp la intersecţia planelor $y = C_1 x$ cu paraboloizii de rotaţie în jurul axei Oz de ecuaţie $z - \sqrt{x^2+y^2+z^2} = C_2$. De menţionat că fiecare plan al familiei $y = C_1 x$ nu trebuie să conţină dreapta de intersecţie a acestuia cu planul Oyz.

Liniile de câmp al celui de al doilea câmp vectorial se găsesc la intersecţia hiperboloizilor $z^2 + xy = C_1$ şi $x^2 + yz = C_2$.

Al treilea câmp vectorial are liniile de câmp drepte rezultate din intersecţia familiilor de plane $x - y = C_1(z-1)$ şi $x + y = C_2(z+1)$. Din fiecare astfel de dreaptă se scot punctele de cote -1 şi 1.

Curbele de intersecţie ale suprafetelor de rotaţie în jurul axei Oz de ecuaţii $z = \dfrac{C_1}{x^2+y^2}$ şi suprafeţele cilindrice cu generatoarele paralele cu axa Oz de ecuaţii $\ln(x^2+y^2) + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = C_2$ reprezintă liniile de câmp ale ultimului câmp vectorial. ∎

Exerciţiul 4.3.3 *Să se determine suprafeţele de câmp ale câmpurilor vectoriale de mai jos care trec prin curbele* (Γ) *specificate alăturat*

1. $\mathbf{v}(x,y,z) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j} + (x^2+y^2)z\,\mathbf{k}, \quad (\Gamma): \begin{cases} x = 2y, \\ z = 1, \end{cases}$

2. $\mathbf{v}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - x^2 - y^2 + 1)\mathbf{k}, \quad (\Gamma): \begin{cases} x - z = a^2, \\ x^2+y^2 = a^2 - 1, \end{cases}$

3. $\mathbf{v}(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + (x^2+y^2+z^2)\,\mathbf{k}, \quad (\Gamma): \begin{cases} x = 1, \\ z = y^2, \end{cases}$

4. $\mathbf{v}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (z - x^2\sin y)\,\mathbf{k}, \quad (\Gamma): \begin{cases} x = y^2, \\ z = 0. \end{cases}$

Soluţie. Sistemele diferenţiale ale liniilor de câmp sunt:

$$\mathbf{1}.\quad \frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{dz}{z(x^2+y^2)};$$

$$\mathbf{2}.\quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z-x^2-y^2+1};$$

$$\mathbf{3}.\quad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x^2+y^2+z^2};$$

$$\mathbf{4}.\quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z-x^2\sinh y}.$$

1. O combinaţie integrabilă a primului sistem simetric este dată de primele două rapoarte egale care, după simplificare cu x^2y^2, conduce la $xdx-ydy=0$ şi din care se obţine integrala primă $x^2-y^2=C_1$.

O a doua combinaţie integrabilă se obţine scriind

$$\frac{\dfrac{dx}{x}}{y^2} = \frac{\dfrac{dy}{y}}{x^2} = \frac{\dfrac{dz}{z}}{x^2+y^2}.$$

Dacă ultimul raport îl egalăm cu suma primelor două, după simplificarea cu x^2+y^2, obţinem combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

care furnizează a doua integrală primă independentă

$$\frac{z}{xy}=C_2.$$

Atunci, generatoarele (G) ale suprafeţei de câmp au ecuaţiile

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= C_1\\ \dfrac{z}{xy} &= C_2.\end{cases}$$

Dar, generatoarele (G) trebuie să se sprijine pe curba directoare Γ. Pentru aceasta, sistemul format de ecuaţiile lor

$$\begin{cases} x^2-y^2 &= C_1\\ \dfrac{z}{xy} &= C_2\\ x &= 2y,\\ z &= 1\end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Fiind un sistem de patru ecuaţii cu trei necunoscute x, y şi z, el va fi compatibil numai dacă constantele C_1, C_2 satisfac relaţia de condiţie

$$2C_1C_2 = 3.$$

Înlocuind pe C_1 şi C_2 din integralele prime găsim că suprafaţa de câmp are ecuaţia carteziană explicită

$$z = \frac{3xy}{2(x^2 - y^2)}.$$

2. O integrală primă se vede imediat şi anume

$$\frac{x}{y} = C_1$$

şi se obţine integrând primele două rapoarte egale. Înmulţind primele două rapoarte cu x, respectiv y şi adunându–le, obţinem un nou raport egal cu primele trei. Un al cincilea raport egal cu primele patru se obţine adunând al treilea raport cu al patrulea. Combinaţia obţinută prin egalarea ultimilor două rapoarte

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} = \frac{\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) + dz}{z + 1}$$

este integrabilă şi, după efectuarea notaţiei $t = x^2 + y^2$, se obţine ecuaţia diferenţială de ordinul întâi liniară şi neomogenă

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1 - t}{2t}$$

a cărei soluţie generală este

$$z = C_2\sqrt{t} - 1 - t.$$

Revenind la notaţie, constatăm că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z + 1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2.$$

Suprafaţa de câmp se obţine rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} & = & C_1 \\ \dfrac{z + 1 + x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & = & C_2 \\ x - z & = & a^2 \\ x^2 + y^2 & = & a^2 - 1. \end{cases}$$

Acest sistem este compatibil dacă şi numai dacă este satisfăcută relaţia de condiţie

$$C_1 = C_2\sqrt{1 + C_1^2}.$$

Înlocuind pe C_1 şi C_2 găsim că suprafaţa de câmp are ecuaţia

$$z = -x^2 - y^2 + x - 1.$$

3. O integrală primă este $\dfrac{y}{x} = C_1$. Înmulţim primul raport cu x, al doilea cu y, alcătuim din acestea un nou raport egal cu celelalte ce are la numărător suma numărătorilor celor două rapoarte modificate şi la numitor suma numitorilor aceloraşi rapoarte şi obţinem în acest fel combinaţia integrabilă

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2z(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Cu notaţia $t = x^2 + y^2$, combinaţia integrabilă se reduce la ecuaţia diferenţială Bernoulli

$$\frac{dz}{dt} - \frac{1}{2t}z = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z}.$$

Substituţia $z^2 = u$ reduce această ecuaţie la ecuaţia diferenţială liniară

$$u' - \frac{1}{t}\,u = 1$$

care are soluţia generală $u = t\,C_2 + t\,\ln t$.

Revenind la vechile variabile, găsim că cea de a doua integrală primă este

$$\frac{z^2 - (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = C_2.$$

Pentru a determina suprafaţa de câmp trebuie să găsim suprafaţa generată de curbele integrale ale sistemului simetric al liniilor de câmp care trebuie să se sprijine pe curba Γ. Se procedează ca la celelalte exerciţii, se găseşte relaţia de condiţie

$$\frac{\dfrac{1}{C_1^4} - \Big(1 + \dfrac{1}{C_1^2}\Big)\ln\Big(1 + \dfrac{1}{C_1^2}\Big)}{1 + \dfrac{1}{C_1^2}} = C_2,$$

de unde, eliminând constantele arbitrare cu ajutorul integralelor prime, deducem că suprafaţa de câmp are ecuaţia

$$z^2 = \frac{y^4}{x^2} + 2(x^2 + y^2)\ln x.$$

4. Integralele prime ale sistemului simetric al liniilor de câmp sunt

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \frac{z}{x} - \frac{x}{y}\cos y = C_2$$

şi ansamblul acestora reprezintă ecuaţiile liniilor de câmp.

Relaţia de condiţie este $C_1C_2+\cos C_1 = 0$, de unde deducem că suprafaţa de câmp care trece prin curba Γ are ecuaţia carteziană explicită

$$z = \frac{x^2}{y}\cos y - y\cos xy.$$

■

4.4 Integrale cu vectori şi câmpuri scalare

Sub această denumire se înţeleg diverse tipuri de integrale (definite sau Riemann, curbilinii, de suprafaţă, duble şi triple) al căror integrant conţin câmpuri vectoriale sau câmpuri scalare. Vom considera câmpuri vectoriale de forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$ sau de forma $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3) \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$, unde $D \subset I\!R^3$ este un domeniu şi câmpuri scalare de forma $\varphi \in \mathcal{F}(D)$, toate satisfăcând condiţiile cerute astfel încât integralele menţionate mai sus să aibă sens. Vom prezenta pe scurt aceste tipuri de integrale.

4.4.1 Integrale curbilinii

Fie AB un arc de curbă în domeniul D care satisface condiţiile de regularitate până la ordinul care va fi necesar.

Integrala curbilinie pe curba AB a unui câmp vectorial $\mathbf{v}(P)$ sau a câmpului scalar $\varphi(P)$ este una din următoarele:

$$\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \mathbf{v}\times d\mathbf{r}; \quad \int_{AB} \varphi\, d\mathbf{r}, \tag{4.48}$$

unde $d\mathbf{r} = dx\,\mathbf{i} + dy\,\mathbf{j} + dz\,\mathbf{k}$ este diferenţiala vectorului de poziţie $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$.

Având în vedere expresiile analitice ale produselor de vectori, integralele curbilinii menţionate în (4.48) se exprimă după cum urmează:

$$\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz; \tag{4.49}$$

$$\int_{AB} \mathbf{v} \times d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_{AB} v_2\,dz - v_3\,dy + \mathbf{j}\int_{AB} v_3\,dx - v_1\,dz + \mathbf{k}\int_{AB} v_1\,dy - v_2\,dx;$$

$$\int_{AB} \varphi(x,y,z)d\mathbf{r} = \mathbf{i}\int_{AB} \varphi(x,y,z)dx + \mathbf{j}\int_{AB} \varphi(x,y,z)dy + \mathbf{k}\int_{AB} \varphi(x,y,z)dz$$

Integralele curbilinii care apar în membrul al doilea în oricare din relaţiile de mai sus au forma generală

$$I = \int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

La studiul integralelor curbilinii de speţa a doua s–a specificat faptul că dacă $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^3)$ reprezintă un câmp de forţe pe D, integrala curbilinie (4.49) este *lucrul mecanic* al forţei $\mathbf{v}(P)$ când punctul P parcurge arcul AB.

Integrala curbilinie (4.49) se mai numeşte *integrală de linie* a vectorului $\mathbf{v}(P)$. Integrala de linie pe curbă închisă (C), parcursă o singură dată, se numeşte *circulaţia* vectorului $\mathbf{v}(P)$ pe curba (C).

Integralele de linie au următoarele proprietăţi:

$$\int_{AB} (\lambda\,\mathbf{v} + \mu\,\mathbf{w}) \cdot d\mathbf{r} = \lambda\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \mu\int_{AB} \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r};$$

$$\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AP} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} + \int_{PB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},\ \ P \in (AB),\ \ AP \cup PB = AB;$$

$$\Big|\int_{AB} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}\Big| \le \int_{AB} |\mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}| \le \int_{AB} \|\mathbf{v}\|\,ds \le M\int_{AB} ds = M \cdot L;$$

$$\int_{AB} \mathbf{v}(x,y,z) \cdot d\mathbf{r} = \Big(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\Big)(x_0,y_0,z_0) \cdot L, \tag{4.50}$$

unde: λ şi μ sunt scalari arbitrari; L este lungimea arcului AB; M este valoarea maximă a normei vectorului $\mathbf{v}(P)$ pe arcul (AB); $Q(x_0,y_0,z_0)$ este un punct determinat pe arcul de curbă (AB).

Proprietatea (4.50) este o teoremă de medie analoagă primei teoreme de medie de la integrala definită.

Celelalte tipuri de integrale curbilinii din (4.48) au proprietăţi similare.

Fie câmpul vectorial continuu $\mathbf{v} \in C(D, \mathbb{R}^3)$.

Definiţia 4.4.1 *Integrala curbilinie* $I = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ *se numeşte* **independentă de drum** *pe domeniul* $D \subset \mathbb{R}^3$ *dacă oricare ar fi punctele* $M_1, M_2 \in$

D şi oricare ar fi arcele de curbă $(M_1\alpha M_2)$ şi $(M_1\beta M_2)$, ambele incluse în D şi cu sensurile de parcurs de la M_1 către M_2, avem

$$\int_{M_1\alpha M_2} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1\beta M_2} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}.$$

Teorema 4.4.1 *Integrala curbilinie $I = \int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D dacă şi numai dacă $I = 0$ oricare ar fi curba închisă netedă sau netedă pe porţiuni $(C) \subset D$.*

Demonstraţie. Dacă $M_1, M_2 \in D$ sunt puncte arbitrare şi $(M_1\alpha M_2) \subset D$, $(M_1\beta M_2) \subset D$ sunt arce arbitrare, netede pe porţiuni, atunci curba $(M_1\alpha M_2\beta M_1)$ este închisă şi netedă pe porţiuni şi, reciproc, fiind dată o curbă orientată închisă, netedă pe porţiuni, $(C) \subset D$ şi $M_1, M_2 \in (C)$ două puncte alese arbitrar, curba C se prezintă ca o juxtapunere de două arce netede pe porţiuni. Din aceste afirmaţii şi Definiţia 4.4.1 rezultă concluzia teoremei. ■

4.4.2 Integrale de suprafaţă

Domeniul pe care se efectuează integrarea este o porţiune de suprafaţă (Σ) de ecuaţie vectorială

$$(\Sigma): \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v), \quad (u,v) \in (\Delta \cup \gamma) \subset I\!R^2, \tag{4.51}$$

unde Δ este un domeniu plan iar frontiera acestuia γ este o curbă netedă închisă. Fie (C) frontiera suprafeţei (Σ). Această curbă este corespunzătoarea prin transformarea (4.51) a curbei închise γ.

Presupunem că suprafaţa (Σ) este netedă. Prin urmare, există şi sunt continue pe Δ derivatele parţiale

$$\mathbf{r}_u(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v), \quad \mathbf{r}_v(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v), \quad (u,v) \in \Delta,$$

care satisfac condiţia de regularitate $\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$.

În aceste condiţii, funcţia

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)}{\|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)\|} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$$

este versorul normalei în punctul $M \in (\Sigma)$ corespunzător punctului $(u,v) \in \Delta$, iar n_1, n_2, n_3 sunt cosinusurile directoare ale acestui versor.

După acelaşi criteriu ca şi la integrale curbilinii, introducem următoarele integrale de suprafaţă de speţa întâi:

$$\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma; \qquad \iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\times\mathbf{w})d\sigma; \qquad \iint\limits_{(\Sigma)} \varphi\mathbf{n}\, d\sigma, \tag{4.52}$$

unde $d\sigma$ este elementul de arie al suprafeţei (Σ).

În cazul când suprafaţa este dată prin ecuaţia vectorială (4.51), expresia elementului de arie $d\sigma$ este

$$d\sigma = \sqrt{E(u,v)G(u,v) - F^2(u,v)}\, dudv,$$

unde $E(u,v), F(u,v)$ şi $G(u,v)$ sunt coeficienţii lui Gauss:

$$E(u,v) = \mathbf{r}_u^2(u,v); \quad F(u,v) = \mathbf{r}_u(u,v)\cdot\mathbf{r}_v(u,v); \quad F(u,v) = \mathbf{r}_v^2(u,v).$$

Integralele de suprafaţă cu vectori din (4.52) se calculează după cum urmează:

$$\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma = \iint\limits_{\Delta} (n_1w_1 + n_2w_2 + n_3w_3)\sqrt{EG-F^2}\, dudv;$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{(\Sigma)} (\mathbf{n}\times\mathbf{w})d\sigma = \mathbf{i}\iint\limits_{(\Sigma)} (n_2w_3 - n_3w_2)d\sigma + \\ +\mathbf{j}\iint\limits_{(\Sigma)} (n_3w_1 - n_1w_3)d\sigma + \mathbf{k}\iint\limits_{(\Sigma)} (n_1w_2 - n_2w_3)d\sigma;\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \varphi\mathbf{n}\, d\sigma = \mathbf{i}\iint\limits_{(\Sigma)} n_1\varphi\, d\sigma + \mathbf{j}\iint\limits_{(\Sigma)} n_2\varphi\, d\sigma + \mathbf{k}\iint\limits_{(\Sigma)} n_3\varphi\, d\sigma. \tag{4.54}$$

Integralele din membrul doi al egalităţilor (4.53) şi (4.54) se reduc la integrale duble pe Δ conform formulei de calcul a unei integrale de suprafaţă de speţa întâi.

Definiţia 4.4.2 *O expresie de forma* $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma$ *se numeşte* **flux elementar** *al câmpului vectorial* $\mathbf{w}$ *prin elementul de suprafaţă orientat* $\mathbf{n}d\sigma$, *iar integrala de suprafaţă de speţa întâi* $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})\, d\sigma$ *se numeşte* **fluxul total** *al câmpului* $\mathbf{w}$ *prin suprafaţa* (Σ).

Proprietăţile integralelor de suprafaţă (4.52) sunt analoage celor prezentate pentru integrale curbilinii. Prin urmare, avem

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \mathbf{n}\cdot(\lambda\,\mathbf{v}+\mu\,\mathbf{w})\,d\sigma = \lambda\iint\limits_{(\Sigma)}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})d\sigma + \mu\iint\limits_{(\Sigma)}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma; \tag{4.55}$$

$$\iint\limits_{(\Sigma)}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma \;=\; \iint\limits_{(\Sigma_1)}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma + \iint\limits_{(\Sigma_2)}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma,; \tag{4.56}$$

$$\Big|\iint\limits_{(\Sigma)}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})d\sigma\Big| \le \iint\limits_{(\Sigma)}|(\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})|d\sigma \le \iint\limits_{(\Sigma)}\|\mathbf{w}\|\,d\sigma \le M\iint\limits_{(\Sigma)}d\sigma = M\,A_\Sigma; \tag{4.57}$$

$$\iint\limits_{(\Sigma)}\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}\,d\sigma = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{w})(x_0,y_0,z_0)\,A_\Sigma, \tag{4.58}$$

unde: λ şi μ sunt scalari arbitrari; Σ_1 şi Σ_2 sunt submulţimi ale suprafeţei Σ pentru care $\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$, $\Sigma_1\cap\Sigma_2=\emptyset$; A_Σ este aria suprafeţei (Σ); M este valoarea maximă a normei vectorului $\mathbf{w}(P)$ pe suprafaţa (Σ); $Q(x_0,y_0,z_0)$ este un punct determinat al suprafeţei Σ.

Proprietatea (4.58) este o teoremă de medie analoagă primei teoreme de medie din teoria integralelor definite.

Celelalte integrale de suprafaţă din (4.52) au proprietăţi asemănătoare celor prezentate în (4.55) – (4.57).

Este posibil ca suprafaţa netedă (Σ) să fie reprezentată cartezian explicit prin ecuaţia

$$(\Sigma):\quad z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\subset I\!R^2, \tag{4.59}$$

caz în care elementul de arie $d\sigma$ al suprafeţei are forma

$$d\sigma=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy,$$

unde

$$p=p(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}(x,y),\quad q=q(x,y)=\frac{\partial z}{\partial y}(x,y),$$

iar versorul normalei $\mathbf{n}$ la faţa superioară a suprafeţei are expresia analitică

$$\mathbf{n} \;=\; -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{i}-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\mathbf{k}. \tag{4.60}$$

În cazul menţionat de (4.59) şi (4.60), reducerea unei integrale de suprafaţă $\iint\limits_{(\Sigma)} \varphi(x,y,z)\,d\sigma$ la o integrală dublă se face cu ajutorul formulei de calcul

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \varphi(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} \varphi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy. \tag{4.61}$$

Folosind (4.59) – (4.61) se pot transpune cu uşurinţă toate rezultatele stabilite în cazul când suprafaţa (Σ) este dată prin ecuaţia vectorială (4.51). Pentru aceasta trebuie efectuată schimbarea de variabile $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ în integrala dublă (4.61).

Afirmaţii asemănătoare au loc şi atunci când suprafaţa (Σ) este dată implicit printr–o ecuaţie de forma $F(x,y,z) = 0$. Astfel,

$$p = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}},$$

iar versorul normalei la suprafaţa (Σ) în punctul $P(x,y,z) \in (\Sigma)$ este

$$\mathbf{n}(P) = \frac{(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)}{\|(\boldsymbol{\nabla} F)(x,y,z)\|}.$$

4.4.3 Integrale triple (de volum)

Fie $\Omega \subset I\!\!R^3$ un domeniu carabil, deci o mulţime care are volum. Elementul de volum, notat cu $d\omega$, are expresia $d\omega = dxdydz$.

Integralele de volum sau triple care ne vor interesa sunt:

$$\iiint\limits_{\Omega} \varphi\,d\omega; \quad \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}\,d\omega. \tag{4.62}$$

Prima din integralele (4.62) a fost studiată arătându–se că, în anumite ipoteze asupra domeniului Ω, ea se reduce la o iteraţie de integrale simple. De exemplu, dacă Ω este un *domeniu simplu* în raport cu axa Oz iar proiecţia sa pe planul xOy este un domeniu simplu în raport cu axa Oy, atunci

$$\Omega = \{(x,y,z) \in I\!\!R^3 | a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x), z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}.$$

Astfel,

$$\iiint\limits_{\Omega} \varphi\, d\omega = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \varphi(x,y,z)\, dz.$$

A doua integrală (4.62) se reduce la calculul a trei integrale de tipul celei precedente,

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}\, d\omega = \mathbf{i} \iiint\limits_{\Omega} v_1\, d\omega + \mathbf{j} \iiint\limits_{\Omega} v_2\, d\omega + \mathbf{k} \iiint\limits_{\Omega} v_3\, d\omega,$$

fiecăreia din integralele membrului drept urmând să i se aplice o formulă de calcul.

Prezentăm, fără demonstraţie, unele proprietăţi ale integralelor triple:

$$\iiint\limits_{\Omega} (\lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w})d\omega = \lambda \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}d\omega + \mu \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{w}d\omega;$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}d\omega = \iiint\limits_{\Omega_1} \mathbf{v}d\omega + \iiint\limits_{\Omega_1} \mathbf{v}d\omega, ;$$

$$\Big| \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{v}(P)\, d\omega\Big| \leq \iiint\limits_{\Omega} \|\mathbf{v}(P)\| d\omega \leq M \iiint\limits_{\Omega} d\omega = M\,\mathrm{Vol}(\Omega),$$

unde Ω_1, Ω_2 sunt astfel încât $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, $\mathrm{Int}\,\Omega_1 \cap \mathrm{Int}\,\Omega_2 = \emptyset$, $M = \max\limits_{P\in\Omega} \|\mathbf{v}(P)\|$ şi $\mathrm{Vol}(\Omega)$ este volumul domeniului Ω.

4.4.4 Formula integrală Gauss–Ostrogradski. Consecinţe

Să considerăm domeniul tridimensional V a cărui frontieră este suprafaţa închisă netedă S şi fie (x_1, x_2, x_3) coordonatele carteziene ale unui punct oarecare $P \in V \cup S$. Suprafaţa S fiind netedă, în fiecare punct $P \in S$ există versorul $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ al normalei exterioare. Astfel, avem un câmp vectorial definit în punctele P ale suprafeţei care depinde de variabila vectorială $\mathbf{x} = \overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$.

Considerăm $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{F}(V \cup S, I\!R^3)$ un câmp vectorial continuu pentru care coordonata v_i are derivata parţială $v_{i,i}$ continuă în V.

În aceste ipoteze are loc *formula integrală Gauss–Ostrogradski*

$$\iint\limits_{S} (n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3)d\sigma = \iiint\limits_{V} (v_{1,1} + v_{2,2} + v_{3,3})d\omega, \qquad (4.63)$$

care se poate scrie şi în forma

$$\iint\limits_S \sum_{i=1}^{3} n_i v_i \, d\sigma = \iiint\limits_V \sum_{i=1}^{3} v_{i,i} \, d\omega. \tag{4.64}$$

În particular, considerând pe rând: $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$; $v_1 = 0$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0$; $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 1$, formula (4.63) devine:

$$\iint\limits_S n_1 \, d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_2 \, d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_3 \, d\sigma = 0. \tag{4.65}$$

Relaţiile (4.65) pot fi scrise unitar în forma

$$\iint\limits_S \mathbf{n} \, d\sigma = \mathbf{0}.$$

Dacă alegem succesiv pentru câmpul vectorial $\mathbf{v}$ una din următoarele expresii analitice:

$$(x_1, 0, 0); \quad (0, x_1, 0); \quad (0, 0, x_1);$$

$$(x_2, 0, 0); \quad (0, x_2, 0); \quad (0, 0, x_2);$$

$$(x_3, 0, 0); \quad (0, x_3, 0); \quad (0, 0, x_3),$$

din (4.64) obţinem

$$\iint\limits_S n_1 x_1 d\sigma = \mathrm{vol}(V); \quad \iint\limits_S n_2 x_1 d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_3 x_1 d\sigma = 0;$$

$$\iint\limits_S n_1 x_2 d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_2 x_2 d\sigma = \mathrm{vol}(V); \quad \iint\limits_S n_3 x_2 d\sigma = 0;$$

$$\iint\limits_S n_1 x_3 d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_2 x_3 d\sigma = 0; \quad \iint\limits_S n_3 x_3 d\sigma = \mathrm{vol}(V).$$

Aceste relaţii pot fi scrise concentrat în forma

$$\iint\limits_S n_i x_j \, d\sigma = \delta_{ij} \, \mathrm{vol}(V), \tag{4.66}$$

unde indicii i şi j iau oricare din valorile $1, 2, 3$, δ_{ij} este simbolul Kronecker ($\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, dacă $i \neq j$), iar $\mathrm{vol}(V)$ este volumul domeniului V.

Din (4.66) se pot deduce relaţiile

$$\iint\limits_S x_1\mathbf{n}d\sigma = \mathrm{vol}(V)\mathbf{i};\ \iint\limits_S x_2\mathbf{n}d\sigma = \mathrm{vol}(V)\mathbf{j};\ \iint\limits_S x_3\mathbf{n}d\sigma = \mathrm{vol}(V)\mathbf{k}. \tag{4.67}$$

4.4.5 Câmp potenţial

Definiţia 4.4.3 *Un câmp vectorial continuu* $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$ *se numeşte* **câmp potenţial** *dacă există câmpul scalar* $\varphi \in C^1(D)$, *numit* **potenţialul scalar** *al câmpului vectorial* $\mathbf{v}$, *astfel încât*

$$\mathbf{v}(M) = (\boldsymbol{\nabla}\varphi)(M),\quad (\forall)\ M \in D.$$

Definiţia 4.4.4 *Un câmp de forţe* $\mathbf{F} \in \mathcal{F}(D, I\!R^3)$ *se numeşte* **câmp conservativ de forţe** *dacă există câmpul scalar* $U \in C^1(D)$, *numită* **funcţie de forţă**, *astfel încât* $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}U$.

Exemplul 4.4.1 *Câmpul gravitaţional este un câmp conservativ de forţe.*

Soluţie. Într-adevăr, să presupunem că originea reperului $Oxyz$ este în centrul pământului. Se ştie că forţa $\mathbf{F}$ cu care este atras de către pământ un punct material $M(\mathbf{r})$ este

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{C}{r^3}\,\mathbf{r},$$

unde C este o constantă iar r este mărimea vectorului de poziţie $\mathbf{r}$ a punctului M. Deoarece:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{x}{r^3};\quad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{y}{r^3};\quad \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{z}{r^3},$$

rezultă că putem reprezenta câmpul de forţă gravitaţional $\mathbf{F}$ în forma

$$\mathbf{F}(M) = (\boldsymbol{\nabla}U)(M),$$

unde $U(M) = C/r$.

Prin urmare, câmpul vectorial $\mathbf{F}$ este un câmp conservativ de forţe pe $I\!R^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. ■

Teorema 4.4.2 *Fie câmpul vectorial* $\mathbf{v} \in C^1(D, I\!R^3)$, *unde* D *este un domeniu tridimensional.*

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- $\mathbf{v}$ *este un câmp potenţial;*
- *integrala curbilinie* $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ *este independentă de drum pe* D;
- *expresia diferenţială* $\omega = \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ *este diferenţială totală pe* D.

Demonstraţie. Faptul că prima afirmaţie implică celelalte două este evident.

Să presupunem că $\omega = \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ este diferenţială totală pe D. Atunci există funcţia U diferenţiabilă pe D astfel încât $\omega = dU = (\boldsymbol{\nabla} U)\cdot(d\mathbf{r})$ din care deducem că

$$\int_{AB} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} dU = U(B) - U(A)$$

şi deci integrala curbilinie depinde doar de extremităţile A şi B ale curbei (C). Din $\omega = (\boldsymbol{\nabla} U)\cdot(d\mathbf{r}) = \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ şi unicitatea expresiei diferenţialei unei funcţii obţinem $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla} U$, ceea ce arată că $\mathbf{v}$ este un câmp potenţial. Aşadar, prima afirmaţie este implicată de ultima.

Dacă integrala curbilinie $\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D, considerând arcul de curbă $\overset{\frown}{AM} \subset D$ cu extremitatea A fixă şi cealaltă extremitete M variabilă, funcţia $U(M) = \int_{AM} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$ are proprietatea $\boldsymbol{\nabla} U = \mathbf{v}$, adică $\mathbf{v}$ este un câmp potenţial. ■

4.5 Divergenţa unui câmp vectorial

Fie $\Omega \subset I\!R^3$ un domeniu având ca frontieră suprafaţa închisă netedă sau netedă pe porţiuni Σ şi $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega\cup\Sigma, I\!R^3)$ un câmp vectorial continuu pe $\Omega\cup\Sigma$, diferenţiabil în orice punct $M(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$.

Considerând un punct $P_0 \in \Omega$, de vector de poziţie $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$, există domenii $V \subset \Omega$ astfel încât $P_0 \in V$. Presupunem că frontiera unui astfel de domeniu V este o suprafaţă închisă netedă S. Fie $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ versorul normalei exterioare într–un punct oarecare $P \in S$ de vector de poziţie $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Fie $\delta(V)$ *diametrul* mulţimii V, adică maximul distanţei dintre două puncte oarecare $M, Q \in V$. Presupunem că domeniul V are volum şi că $\mathrm{vol}\,(V)$ este volumul său.

Cu aceste pregătiri, considerăm raportul

$$\frac{\Phi}{\mathrm{vol}\,(V)} = \frac{\displaystyle\iint_S \Big(\mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\Big)d\sigma}{\mathrm{vol}\,(V)}, \tag{4.68}$$

dintre fluxul Φ a câmpului vectorial $\mathbf{v}$ prin suprafaţa S şi vol(V).

Definiţia 4.5.1 *Se numeşte* **divergenţa** *câmpului vectorial* $\mathbf{v}$, *în punctul* P_0, *notată* $(div\, \mathbf{v})(P_0)$ *sau* $(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x_0})$, *limita raportului* (4.68) *atunci când diametrul domeniului* V *tinde la zero, deci*

$$\lim_{\delta(V)\to 0} \frac{\displaystyle\iint_S (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}))d\sigma}{\mathrm{vol}\,(V)} = (\mathrm{div}\,\mathbf{v})(P_0) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0). \tag{4.69}$$

Teorema 4.5.1 *Dacă* $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ *este câmp vectorial diferenţiabil în* $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OP}_0$ *şi există constantele pozitive* k_1 *şi* k_2 *astfel încât:*

$$aria\,(S) \leq k_1\, \delta^2(V); \quad vol\,(V) \geq k_2\, \delta^3(V), \tag{4.70}$$

atunci limita (4.69) *există şi*

$$(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}(\mathbf{x}_0). \tag{4.71}$$

Demonstraţie. Din ipoteza diferenţiabilităţii funcţiei vectoriale $\mathbf{v}$ de argument vectorial în punctul $\mathbf{x}_0 \in D$ rezultă că are loc identitatea

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0) + d\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \tag{4.72}$$

unde

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (d\mathbf{v})(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = (\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k})\Big(J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)\Big(X - X_0\Big)\Big)$$

este valoarea în $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = (\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k})\Big(X - X_0\Big)$ a diferenţialei funcţiei $\mathbf{v}$ în punctul $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k})X_0$,

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0) = \Big\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \Big\|_{3\times 3}$$

este matricea jacobiană a funcţiei $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ în punctul $\mathbf{x}_0$, iar $\boldsymbol{\alpha}$ este o funcţie vectorială definită pe $I\!R^3$ cu proprietatea

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{4.73}$$

În aceste relaţii, $X - X_0$ şi X_0 reprezintă matricea cu trei linii şi o coloană a coordonatelor vectorilor $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ şi respectiv $\mathbf{x}_0$ în baza formată de versorii

ortogonali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ care, împreună cu originea O, constituie reperul cartezian ortogonal $Ox_1x_2x_3$.

Dacă înmulţim ambii membri ai relaţiei (4.72) cu $\mathbf{n}(\mathbf{x})$, integrăm pe suprafaţa S, ţinem cont de relaţiile (4.66) şi (4.67) şi împărţim cu vol (V), se obţine

$$\frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\sigma}{\text{vol}\,(V)} = \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0) + \frac{\displaystyle\iint_S \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| (\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))\, d\sigma}{\text{vol}\,(V)}.$$

Trecem acum în membrul întâi primul termen al membrului doi al acestei relaţii şi luăm valoarea absolută a noii egalităţi. A doua ipoteză (4.70), faptul că $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \delta(V)$ şi inegalitatea Schwarz–Cauchy–Buniakowski

$$|\mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{n}(\mathbf{x})\|\, \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|,$$

conduc la

$$\left| \frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\sigma}{\text{vol}\,(V)} - \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{\displaystyle\iint_S \|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|\, d\sigma}{k_2 \delta^2(V)}. \tag{4.74}$$

Însă, din (4.73) rezultă că funcţia $\boldsymbol{\alpha}$ este continuă în $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ceea ce atrage că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\mu(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$\|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \frac{k_2}{k_1}\varepsilon, \tag{4.75}$$

oricare ar fi $\mathbf{x} \in S$ care satisface inegalitatea

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \mu(\varepsilon).$$

Putem considera că domeniul $V \subset \Omega$ ce conţine punctul $\mathbf{x}_0$ este astfel ales încât $\delta(V) \leq \mu(\varepsilon)$. În acest caz, din (4.70), (4.74), (4.75) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\mu(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi domeniul V cu $\delta(V) < \mu$ avem

$$\left| \frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\sigma}{\text{vol}\,(V)} - \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0) \right| < \varepsilon$$

ceea ce conduce la relaţia

$$\lim_{\delta(V)\to 0}\frac{\displaystyle\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}d\sigma}{\mathrm{vol}(V)}=\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\Big)(\mathbf{x}_0). \tag{4.76}$$

Din (4.69) şi (4.76) rezultă (4.71). ■

Cum divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ într–un punct oarecare $M\in\Omega$ este

$$(\mathrm{div}\,\mathbf{v})(x,y,z)=\frac{\partial v_1}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial v_2}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial v_3}{\partial z}(x,y,z), \tag{4.77}$$

analizând (4.77) constatăm că în membrul al doilea este rezultatul înmulţirii scalare a operatorului diferenţial al lui Hamilton

$$\boldsymbol{\nabla} \;=\; \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

cu vectorul $\mathbf{v}$ şi deci notaţia $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}$ pentru divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{v}$ este justificată.

Definiţia 4.5.2 *Un câmp vectorial* $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(D,I\!R^3)$, *diferenţiabil în domeniul* D, *se numeşte* **solenoidal** *dacă div* $\mathbf{v}=0$.

4.6 Rotorul unui câmp vectorial

Să considerăm o direcţie arbitrară de versor $\mathbf{a}$ şi fie (Π) planul perpendicular pe versorul $\mathbf{a}$ care trece printr-un punct fixat $P_0\in\Omega$ În acest plan considerăm o curbă simplă închisă (C) care înconjoară punctul P_0. Curba (C) delimitează o porţiune (S) de suprafaţă plană, a cărei arie o notăm tot cu S. Fie $\delta(S)$ diametrul mulţimii (S).

Pentru a introduce rotorul unui câmp vectorial $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(\Omega,I\!R^3)$, plecăm de la circulaţia Γ a acestuia pe curba (C) şi să calculăm limita

$$\lim_{\delta(S)\to 0}\frac{\Gamma}{S}=\lim_{\delta(S)\to 0}\frac{\displaystyle\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{r}}{S}.$$

În acest scop, transformăm raportul Γ/S într–un raport dintre un flux pe o suprafaţă închisă $(\mathcal{S})$ şi volumul domeniului V închis de această suprafaţă,

reducând astfel problema la cea prezentată în paragraful precedent. Pentru aceasta, considerăm porţiunea din suprafaţa cilindrică, cu generatoarele paralele cu $\mathbf{a}$, de înălţime constantă h şi având una din baze porţiunea de suprafaţă (S).

Notăm cu (S_1) cealaltă bază a cilindrului, cu (S_ℓ) suprafaţa laterală a sa, iar cu $d\sigma_\ell$ elementul de arie al suprafeţei (S_ℓ).

Având în vedere că $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau}\, ds$ şi că $h \cdot ds = d\sigma_\ell$, rezultă că

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{h \cdot \displaystyle\int_C \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{r}}{h \cdot S} = \frac{\displaystyle\iint_{S\ell} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}\, d\sigma_\ell}{\mathrm{vol}\,(V)}, \tag{4.78}$$

unde $\boldsymbol{\tau}$ este versorul tangentei la curba (C) orientat astfel încât să fie compatibil cu orientarea suprafeţei (S). Însă $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{n}_\ell$ (normala exterioară la suprafaţa laterală a cilindrului) formează un triedru drept astfel că $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}_\ell$. Atunci, (4.78) devine

$$\frac{\Gamma}{S} = \frac{\displaystyle\iint_{S\ell} (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}_\ell\, d\sigma_\ell}{\mathrm{vol}\,(V)}. \tag{4.79}$$

Deoarece integralele pe bazele cilindrului din integrandul care intră în (4.79) sunt nule, în baza celor deduse în paragraful prercedent, rezultă că

$$\lim_{\delta(S)\to 0} \frac{\Gamma}{S} = \lim_{\delta(V)\to 0} \frac{\displaystyle\iint_{S} (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}\, d\sigma}{\mathrm{vol}\,(V)} = (\boldsymbol{\nabla} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{a}))(\mathbf{x}_0). \tag{4.80}$$

Dacă aplicăm formula de calcul a divergenţei, găsim că limita din (4.80) se poate scrie ca produsul scalar dintre vectorul $\mathbf{a}$ şi un anumit vector $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$

$$\lim_{\delta(S)\to 0} \frac{\Gamma}{S} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}_0),$$

unde

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (v_{3,2}(\mathbf{x}_0) - v_{2,3}(\mathbf{x}_0))\mathbf{i} + (v_{1,3}(\mathbf{x}_0) - v_{3,1}(\mathbf{x}_0))\mathbf{j} + (v_{2,1}(\mathbf{x}_0) - v_{1,2}(\mathbf{x}_0))\mathbf{k}.$$

Definiţia 4.6.1 *Vectorul* $\mathbf{w}(\mathbf{x}_0)$ *se numeşte* **rotorul** *câmpului vectorial* $\mathbf{v}$ *în punctul* $\mathbf{x}_0$ *şi se scrie:*

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}_0) = (\mathrm{rot}\,\mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Dacă analizăm expresia rotorului vedem că aceasta se poate calcula cu ajutorul determinantului formal

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v})(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}(\mathbf{x}_0) = (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})(\mathbf{x}_0).$$

Într–un punct oarecare $\mathbf{x}$, vom avea

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v})(\mathbf{x}) = (\operatorname{rot}\mathbf{v})(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1(\mathbf{x}) & v_2(\mathbf{x}) & v_3(\mathbf{x}) \end{vmatrix}.$$

Definiţia 4.6.2 *Un câmp vectorial* $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(D,I\!R^3)$*, diferenţiabil în domeniul* D*, se numeşte* **irotaţional** *sau* **lamelar** *dacă* $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\mathbf{0}$.

Teorema 4.6.1 *Un câmp potenţial* $\mathbf{v}\in\mathcal{F}(D,I\!R^3)$*, al cărui potenţial* $\varphi\in C^2(D)$*, este lamelar.*

Demonstraţie. Într-adevăr, câmpul vectorial $\mathbf{v}$ fiind potenţial, $\mathbf{v}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)$. Calculând rotorul acestui câmp, găsim

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} = \Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_3}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_2}\Big)\mathbf{i}+\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_1}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_3}\Big)\mathbf{j}+\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}\Big)\mathbf{k}.$$

Deoarece φ este de clasă $C^2(D)$, derivatele parţiale mixte de ordinul doi ale lui φ sunt egale şi deci $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}=\mathbf{0}$. ■

4.7 Reguli de calcul cu operatorul lui Hamilton

O parte a acestor reguli au fost menţionate în (4.29) unde operatorul $\boldsymbol{\nabla}$ s–a aplicat unor funcţii scalare. Mai mult, gradientul poate fi aplicat şi unui produs scalar a două câmpuri vectoriale. Am văzut mai sus că operatorul $\boldsymbol{\nabla}$ aplicat scalar unui câmp vectorial, sau unei sume de câmpuri biscalare,

dă ca rezultat divergenţa acelor câmpuri, iar dacă $\boldsymbol{\nabla}$ se aplică vectorial unor asemenea câmpuri se obţine rotorul acelor câmpuri vectoriale, adică

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi = \operatorname{grad}\varphi; \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} \;=\; \operatorname{div}\mathbf{u}; \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v} \;=\; \operatorname{rot}\mathbf{v}.$$

În baza celor prezentate mai sus, se pot demonstra următoarele formule de calcul cu operatorul vectorial $\boldsymbol{\nabla}$ a lui Hamilton (pentru simplitate, renunţam la scrierea variabilei vectoriale $\mathbf{x}$):

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v};$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v};$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\,\mathbf{u}) = \varphi(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\varphi);$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v});$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\varphi\,\mathbf{u}) = \varphi(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) - \mathbf{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi);$$

$$\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{u}) + \mathbf{u}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v};$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}) - \nabla^2\mathbf{v},$$

unde $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ este *operatorul lui Laplace* sau *laplacian.* Avem

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0,$$

se numeşte *ecuaţia lui Laplace.* Orice soluţie a ecuaţiei lui Laplace se numeşte *funcţie armonică.*

Pentru alte operaţii cu operatorul $\boldsymbol{\nabla}$, obţinem:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \;=\; \mathbf{u}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}; \tag{4.81}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi) = \mathbf{0}; \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0.$$

4.8 Formule integrale

Fie (Σ) o suprafaţă închisă ce mărgineşte domeniul Ω, care are următoarele proprietăţi:

- o dreaptă paralelă la axele de coordonate ale reperului cartezian ortogonal $Oxyz$ intersectează suprafaţa (Σ) în cel mult două puncte;
- Ω se proiectează pe planul xOy după un domeniu D şi cilindrul proiectant al lui Ω cu generatoarele paralele cu Oz este tangent la Ω în lungul unei curbe (Γ) care împarte (Σ) în două suprafeţe (condiţii analoage se pot pune şi pentru planele yOz şi zOx);
- suprafaţa (Σ) este cu două feţe şi presupunem că este formată dintr–un număr de porţiuni netede.

Pentru astfel de suprafeţe (Σ) şi domeniile Ω mărginite de ele au loc următoarele formule integrale (legături între tipurile de integrale cu vectori sau cu câmpuri scalare):

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{v}\,d\omega; \tag{4.82}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{n}\varphi\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{grad}\varphi\,d\omega; \tag{4.83}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{n}\times\mathbf{v}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{v}\,d\omega, \tag{4.84}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi\,\frac{d\psi}{d\mathbf{n}}\,d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi + \varphi\nabla^2\psi)d\omega, \tag{4.85}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \Big(\varphi\,\frac{d\psi}{d\mathbf{n}} - \psi\frac{d\varphi}{d\mathbf{n}}\Big)d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)d\omega, \tag{4.86}$$

Formulă integrală (4.82) este forma vectorială a formulei integrale Gauss–Ostrogradski (4.63). Aceasta este întâlnită şi sub denumirea *formula integrală a divergenţei* sau ca *teorema divergenţei.*

Identitatea (4.83) se numeşte *formula integrală a gradientului.*

Relaţiei (4.84) i se poate spune *formula integrală a rotorului.*

Egalitatea (4.85) este cunoscută sub denumirea de *prima identitate integrală a lui Green.*

Relaţia (4.86) este *a doua identitate integrală a lui Green.*

Dacă (S) este o porţiune de suprafaţă regulată orientabilă (cu două feţe) având frontiera o curbă închisă rectificabilă (Γ), iar câmpul vectorial $\mathbf{v} \in \mathcal{F}(\Omega, I\!R^3)$ este diferenţiabil şi $S \subset \Omega$, atunci are loc *formula integrală a lui Stokes*

$$\int_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\sigma. \tag{4.87}$$

Teorema 4.8.1 *Câmpul vectorial* $\mathbf{v} \in C^1(D, I\!R^3)$ *este irotaţional pe domeniul simplu conex* $D \subset I\!R^3$ *dacă şi numai dacă integrala curbilinie* $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ *este independentă de drum pe* D.

Demonstraţie. Presupunem $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ şi fie (C) o curbă închisă oarecare inclusă în D. Există atunci suprafeţe $S \subset D$ cu frontiera C. Aplicând formula integrală a lui Stokes (4.87), găsim $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$. În baza Teoremei 4.4.1 rezultă că integrala curbilinie $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum pe D.

Demonstraţia reciprocei se face prin reducere la absurd. Presupunem că există un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ în care $\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$ şi fie că, în acest punct, $v_{2,1} - v_{1,2} = \mu > 0$. Atunci există o vecinătate a punctului M_0, situată în planul $z = z_0$ şi inclusă în D, în punctele căreia să avem $v_{2,1} - v_{1,2} > 0$. Aplicând formula lui Stokes în care porţiunea de suprafaţă este în vecinătatea de mai sus, găsim că pe frontiera acesteia, care este o curbă închisă din D, integrala curbilinie este diferită de zero. Dar acest lucru contrazice ipoteza. ■

Exerciţiul 4.8.1 *Se dă câmpul de forţă definit pe* $I\!R^3$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + zx(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}.$$

Să se arate că acest câmp vectorial este irotaţional şi să se determine funcţia de forţă.

Soluţie Faptul că $\mathbf{F}$ este câmp irotaţional de forţă este simplu de arătat.

În baza Teoremei 4.8.1 rezultă că integrala curbilinie $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ este independentă de drum în $I\!R^3$. Folosind Teorema 4.4.2 deducem că funcţia de forţă care se anulează în origine este $U = \int_{OM} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, unde $M(x, y, z)$ este un punct oarecare.

Deoarece integrala curbilinie este independentă de drum, se poate integra de la origine la M pe muchiile paralelipipedului dreptunghic cu muchiile paralele cu axele de coordonate ce are O şi M ca vârfuri opuse. Atunci

$$U(M) = \int_0^x v_1(t,0,0)dt + \int_0^y v_2(x,t,0)dt + \int_0^z v_3(x,y,t)dt.$$

Având în vedere coordonatele câmpului vectorial $\mathbf{v}$, rezultă că funcţia de forţă a câmpului de forţă $\mathbf{F}$, care se anulează în origine, este

$$U(x,y,z) = \int_0^z xy(x+y+2t)dt = xyz(x+y+z).$$

Oricare altă funcţie de forţă a câmpului $\mathbf{F}$ diferă printr–o constantă de U determinat mai sus. ■

Exerciţiul 4.8.2 *Să se determine liniile de câmp ale câmpului vectorial*

$$\mathbf{w} = (-x+y+z)\mathbf{i} + (x-y+z)\mathbf{j} + (x+y-z)\mathbf{k}.$$

Arătaţi de asemenea că $\mathbf{w}$ *este un câmp conservativ şi determinaţi funcţiile de forţă. Calculaţi apoi fluxul câmpului* $\mathbf{w}$ *prin faţa exterioară a suprafeţei închise* S *de ecuaţie*

$$|-x+y+z| + |x-y+z| + |x+y-z| = 1.$$

Soluţie. Din sistemul de ecuaţii diferenţiale ale liniilor de câmp deducem combinaţiile integrabile

$$\frac{dx+dy+dz}{x+y+z} = \frac{dy-dx}{-2(y-x)} = \frac{dx+dy-2dz}{-2(x+y-2z)}$$

şi liniile de câmp

$$\begin{cases} (x+y+z)^2(x+y-2z) = C_1 \\ x+y-2z = C_2(y-x) \end{cases}$$

care sunt intersecţii de cilindri şi plane.

Avem că $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$ ceea ce arată că $\mathbf{w}$ este un câmp conservativ.

Observând că expresia diferenţială $\omega = \mathbf{w} \cdot d\mathbf{r}$ este diferenţiala funcţiei

$$-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + xy + yz + zx,$$

deducem că funcţiile de forţă sunt

$$F(x,y,z) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + xy + yz + zx + const.$$

Suprafaţa prin care se calculează fluxul este închisă, are opt feţe şi limitează domeniul V. Folosind formula integrală Gauss–Ostrogradski rezultă $\nabla \cdot \mathbf{w} = -3$ şi $\Phi = \iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{w} dxdydz = -3 \iiint\limits_V dxdydz.$

Pentru calculul integralei triple efectuăm schimbarea de variabile

$$X = -x+y+z, \quad Y = x-y+z, \quad z = x+y-z$$

pentru care $dxdydz = \dfrac{1}{4}dXdYdZ$. Frontiera Σ a domeniului transformat V_1 are ecuaţia $|X|+|Y|+|Z| = 1$, deci V_1 este un octoedru de volum $4/3$. Rezultă $\Phi = -1$. ■

Exerciţiul 4.8.3 *Fie* $\mathbf{a}$ *un versor constant şi câmpul vectorial*

$$\mathbf{v} \in \mathcal{F}(I\!R^3, I\!R^3), \quad \mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{a} \times \mathbf{u}(r).$$

Să se arate că au loc relaţiile:

1. $\displaystyle \iint\limits_\Sigma \mathbf{v} \times \mathbf{n}\, d\sigma + \mathbf{a} \iiint\limits_\Omega div\, \mathbf{u}\, d\omega = \iiint\limits_\Omega \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}}\, d\omega;$

2. $\displaystyle \iint\limits_\Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma + \mathbf{a} \cdot \iiint\limits_\Omega rot\, \mathbf{u}\, d\omega = 0;$

3. $\displaystyle \iint\limits_\Sigma div\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma + \mathbf{a} \times \iiint\limits_\Omega rot\,(rot\, \mathbf{u}) d\omega = -\iiint\limits_\Omega \frac{d(rot\, \mathbf{u})}{d\mathbf{a}}\, d\omega,$

unde Ω *este un domeniu tridimensional oarecare mărginit de suprafaţa* Σ, *închisă şi netedă pe porţiuni.*

Soluţie. Utilizând formula integrală a rotorului (4.84), obţinem

$$\iint\limits_\Sigma \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = -\iiint\limits_\Omega \mathrm{rot}\, \mathbf{v}\, d\omega.$$

Înlocuind în membrul al doilea pe $\mathbf{v}$ şi ţinând cont de formula (4.81), deducem

$$\iint\limits_\Sigma \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = -\iiint\limits_\Omega [\mathbf{a}\, \mathrm{div}\, \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathrm{div}\, \mathbf{a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u}] d\omega.$$

Deoarece $\mathbf{a}$ este versor constant, $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$ şi $(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} = \mathbf{0}$ şi

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\times\mathbf{n}d\sigma = -\mathbf{a}\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{u}\, d\omega + \iiint\limits_{\Omega} (\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}d\omega.$$

Cu relaţia (4.47) avem $\displaystyle\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\times\mathbf{n}d\sigma = -\mathbf{a}\iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{u}\, d\omega + \iiint\limits_{\Omega} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{a}}\, d\omega,$ de unde rezultă prima identitate.

Pentru a demonstra a doua identitate, aplicăm formula integrală Gauss–Ostrogradski (4.82), calculând totodată şi divergenţa produsului de vectori. Obţinem

$$\iint\limits_{\Sigma} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} (\mathbf{u}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{u})d\omega = -\mathbf{a}\cdot \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\mathbf{u}\, d\omega,$$

din care se deduce a doua identitate.

Pentru demonstraţia celei de a treia identităţi se foloseşte (4.83). ■

Exerciţiul 4.8.4 *Se consideră câmpul vectorial* $\mathbf{w} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, *unde* $\mathbf{a}$ *este un versor constant şi* $\mathbf{r}$ *este vectorul de poziţie al unui punct* $M(x,y,z)\in\Omega$. *Frontiera domeniului* Ω *este suprafaţa închisă orientabilă* (Σ) *cu proprietăţile precizate la începutul paragrafului.*

Să se arate că au loc relaţiile:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathit{div}\ \mathbf{w})\mathbf{n}d\sigma = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega} \mathit{rot}\ \mathit{rot}\ \mathbf{w}\, d\omega; \tag{4.88}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{n}\times \mathit{rot}\ \mathbf{w})d\sigma = 2\iiint\limits_{\Omega} \mathit{grad}\ \mathit{div}\ \mathbf{w}\, d\omega. \tag{4.89}$$

Soluţie. Calculând divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{w}$, găsim

$$\operatorname{div}\ \mathbf{w} = r^2 - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})^2.$$

Aplicăm formula integrală a gradientului (4.83) în care $\varphi = \operatorname{div}\ \mathbf{w}$. Aşadar, vom avea

$$\iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{div}\ \mathbf{w})\mathbf{n}\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{grad}\ \operatorname{div}\ \mathbf{w}\, d\omega.$$

Având în vedere expresia lui $\operatorname{div}\ \mathbf{w}$ şi regulile de calcul cu gradientul, deducem

$$\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\ \mathbf{w} = 2[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})\mathbf{a}].$$

Pe de altă parte rot rot $\mathbf{w} = 4[\mathbf{r} - 3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}]$, adică

$$\text{rot rot } \mathbf{w} = 2\text{grad div } \mathbf{w} \tag{4.90}$$

şi astfel egalitatea (4.88) este evidentă.

Pentru a demonstra relaţia (4.89) folosim formula integrală a rotorului (4.84) în care câmpul vectorial $\mathbf{v}$ este înlocuit cu rot $\mathbf{w}$. Prin urmare, avem

$$\iint\limits_{\Sigma} (\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{w}) d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \text{rot rot } \mathbf{w} \, d\omega. \tag{4.91}$$

Dacă în relaţia (4.91) facem uz de (4.90) deducem că are loc şi (4.89). ■

Exerciţiul 4.8.5 *Se consideră* $\mathbf{v} = \varphi(r)\mathbf{r}$ *un câmp vectorial definit pe un domeniu* $\Omega \subset I\!R^3$ *a cărui frontieră este suprafaţa închisă şi netedă pe porţiuni* (Σ). *Presupunem că funcţia* φ *este diferenţiabilă pe un interval* $I \subset I\!R_+$. *Vectorul de poziţie şi mărimea razei vectoare ale punctului* $M(x, y, z) \in \Omega \cup \Sigma$ *sunt*

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \quad r = \| \overrightarrow{OM} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{4.92}$$

Să se arate că au loc identităţile:

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi(r)\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - 3 \iiint\limits_{\Omega} \varphi(r) \, d\omega = \iiint\limits_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathit{grad}\ \varphi(r) \, d\omega; \tag{4.93}$$

$$\int_{\Gamma} \varphi(r)\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = 0, \tag{4.94}$$

unde Γ *este o curbă simplă închisă, netedă pe porţiuni, inclusă în domeniul închis* $\Omega \cup \Sigma$, *care este frontiera unei suprafeţe deschise* $S \subset \Omega \cup \Sigma$.

Soluţie. Din (4.92) rezultă că expresia analitică a câmpului vectorial $\mathbf{v}$ este

$$\mathbf{v} = x\varphi(r)\,\mathbf{i} + y\varphi(r)\,\mathbf{j} + z\varphi(r)\,\mathbf{k},$$

iar divergenţa lui, conform (4.77), este

$$\text{div } \mathbf{v} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

Formula integrală Gauss–Ostrogradski (4.82) conduce la

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi(r)\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma - 3 \iiint\limits_{\Omega} \varphi(r) \, d\omega = \iiint\limits_{\Omega} r\,\varphi'(r) \, d\omega. \tag{4.95}$$

Identitatea (4.93) rezultă din (4.95) deoarece $r\varphi'(r) = \mathbf{r} \cdot \text{grad } \varphi(r)$.

Identitatea (4.94) rezultă din formula lui Stokes (4.87) aplicată câmpului vectorial $\mathbf{v}$, căci rot $\mathbf{v} = \text{rot } (\varphi(r)\mathbf{r}) = \mathbf{0}$. ■

Capitolul 5

Funcţii de variabilă complexă

5.1 Mulţimea numerelor complexe

Fie $\mathbb{C}$ mulţimea perechilor ordonate de forma (x,y), $x,y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{C} = \{z = (x,y)|\ x,y \in \mathbb{R}\}. \tag{5.1}$$

Două elemente ale lui C, $z = (x,y)$ şi $z_0 = (x_0,y_0)$ sunt *egale* dacă şi numai dacă $x = x_0$ şi $y = y_0$.

Fie $z_1 = (x_1,y_1)$ şi $z_2 = (x_2,y_2)$ două elemente arbitrare ale mulţimii $\mathbb{C}$.

În mulţimea $\mathbb{C}$ definim legile de compoziţie binare interne:

$$\begin{cases} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \\ (\forall)\ (z_1,z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad \to \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \in \mathbb{C}, \end{cases} \tag{5.2}$$

numită *adunarea* elementelor lui $\mathbb{C}$;

$$\begin{cases} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \\ (\forall)\ (z_1,z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \quad \to \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C}, \end{cases} \tag{5.3}$$

numită *înmulţirea* elementelor lui $\mathbb{C}$.

De asemenea, pe mulţimea $\mathbb{C}$, definim şi *operaţia externă cu domeniul de operatori* $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \\ (\forall)\ (\alpha,\ z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \quad \to \quad \alpha \cdot z = (\alpha x,\ \alpha y) \in \mathbb{C}, \end{cases} \tag{5.4}$$

numită *înmulţirea elementelor mulţimii* $\mathbb{C}$ *cu scalari* din .$\mathbb{R}$

Nu este greu de demonstrat că:

$$(\mathbb{C}, +) \quad \text{este } \textbf{grup aditiv abelian} \ ; \tag{5.5}$$

$$(\mathbb{C}, \cdot) \quad \text{este } \textbf{grup abelian multiplicativ}; \tag{5.6}$$

$$z \cdot (z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2, \quad (\forall) \ z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{5.7}$$

Elementul nul al grupului abelian aditiv $(\mathbb{C}, +)$ este perechea $(0, 0)$, pe care o vom nota cu 0, iar opusul perechii $z = (x, y)$ este perechea $(-x, -y)$, notată cu $-z$.

Folosind (5.5) şi (5.6), deducem că elementul nul şi opusul oricărui element din $\mathbb{C}$ sunt unice.

Se constată că elementul unitate al grupului $(\mathbb{C}, \cdot)$ este perechea $(1, 0)$ pe care convenim să o notăm cu 1 deoarece, în baza legii (5.3),

$$z \cdot 1 = (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, \ x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z.$$

Inversul elementului $z = (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ este $z^{-1} = \Big(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{-y}{x^2 + y^2}\Big)$ deoarece $z \cdot z^{-1} = 1 = (1, 0)$.

Elementul unitate al grupului $(\mathbb{C}, \cdot)$ este unic iar inversul oricărui z nenul din $\mathbb{C}$ este, de asemenea, unic.

Operaţia (5.4) se bucură de proprietăţile:

$$\begin{cases} 1 \cdot z & = & z, & (\forall) \ z \in \mathbb{C}, \quad 1 \in \mathbb{R}; \\ (\alpha + \beta) \cdot z & = & \alpha \cdot z + \beta \cdot z, & (\forall) \ z \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \\ (\alpha \cdot \beta) \cdot z & = & \alpha \cdot (\beta \cdot z), & (\forall) \ z \in \mathbb{C}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \\ \alpha \cdot (z_1 + z_2) & = & \alpha \cdot z_1 + \alpha \cdot z_2, & (\forall) \ \alpha \in \mathbb{R}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \end{cases} \tag{5.8}$$

Analiza relaţiilor (5.2), (5.3), (5.5) – (5.7) arată că

$$(\mathbb{C}, +, \cdot) \quad \text{este } \textbf{corp comutativ} \text{ sau } \textbf{câmp}, \tag{5.9}$$

iar din (5.2), (5.4), (5.5) şi (5.8) rezultă că

$$\mathbb{C} \quad \text{este } \textbf{spaţiu liniar real}. \tag{5.10}$$

Elementele $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$ şi $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ sunt *liniar independente* deoarece

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot i = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta = 0. \tag{5.11}$$

Apoi, în baza relaţiilor (5.2), (5.4), orice element $z \in \mathbb{C}$ se scrie în mod unic ca o combinaţie liniară a elementelor 1 şi i din $\mathbb{C}$. Într-adevăr, avem relaţiile

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x \cdot 1 + y \cdot i, \qquad (5.12)$$

din care desprindem scrierea

$$z = x + iy. \qquad (5.13)$$

Rezultatele (5.10) – (5.13) arată că mulţimea $\{1,\, i\} \subset \mathbb{C}$ o bază în $\mathbb{C}$. Prin urmare, *dimensiunea* spaţiului vectorial real $\mathbb{C}$ este 2.

Remarcăm că $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$ are proprietatea

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -1. \qquad (5.14)$$

Definiţia 5.1.1 *Mulţimea* $\mathbb{C}$, *cu operaţiile şi proprietăţile menţionate, se numeşte* **mulţimea numerelor complexe**. *Numărul complex* $i = (0, 1)$ *se numeşte* **unitatea imaginară**.

Definiţia 5.1.2 *Scrierea* (5.13) *se numeşte* **forma algebrică** *a unui număr complex. Numerele reale* x *şi* y *din această scriere se numesc respectiv* **partea reală** *şi* **partea imaginară** *a numărului complex* z.

Fie $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ spaţiul liniar real euclidian de dimensiune este 2. Acesta, poate fi identificat cu mulţimea vectorilor geometrici dintr–un plan în care s–a ales reperul ortonormat $\mathcal{R} = \{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ (O, *originea reperului*, este un punct fixat al planului, iar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – *versorii reperului*, corespund perechilor $(1, 0)$ şi $(0, 1)$ care au ca reprezentanţi în O segmentele orientate perpendiculare $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$).

Dacă notăm cu Ox, Oy axele reale cu originea comună în O şi versorii directori $\mathbf{i}$ şi $\mathbf{j}$, numite *axele reperului*, atunci reperul $\mathcal{R}$ se poate nota şi cu xOy.

Reprezentantul în origine al vectorului $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ este segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$ ale cărui proiecţii pe axele Ox, Oy ale reperului sunt segmentele orientate $\overrightarrow{OM_1}$, respectiv $\overrightarrow{OM_2}$. Aceste segmente orientate sunt la rândul lor reprezentanţii în origine a vectorilor $\mathbf{v_1}$ şi $\mathbf{v_2}$, coliniari cu versorii $\mathbf{i}$, respectiv $\mathbf{j}$, factorii de coliniaritate fiind mărimile algebrice x, $y \in \mathbb{R}$ ale proiecţiilor vectorului $\mathbf{v}$ pe versorii $\mathbf{i}$, respectiv $\mathbf{j}$. Prin urmare, avem $\mathbf{v}_1 = x\,\mathbf{i}$ şi $\mathbf{v}_2 = y\,\mathbf{j}$.

Deoarece segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$ este suma segmentelor orientate $\overrightarrow{OM}_1$ şi $\overrightarrow{OM}_2$, putem scrie

$$\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \tag{5.15}$$

care reprezintă exprimarea vectorului $\mathbf{v}$ în baza $\{\mathbf{i},\, \mathbf{j}\}$.

Perechea (x, y) stabileşte totodată poziţia punctului M în planul considerat şi de aceea x şi y se numesc *coordonatele punctului* M (*abscisa*, respectiv *ordonata*) în reperul xOy, fapt ce se scrie în forma $M(x, y)$.

Aplicaţia

$$\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{\varphi}(z) = \mathbf{v}, \tag{5.16}$$

unde z şi $\mathbf{v}$ sunt daţi în (5.13), respectiv (5.15), este liniară (are proprietatea $\boldsymbol{\varphi}(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2) = \alpha_1 \boldsymbol{\varphi}(z_1) + \alpha_2 \boldsymbol{\varphi}(z_2)$) şi bijectivă.

Rezultă că $\boldsymbol{\varphi}$ stabileşte un *izomorfism* între spaţiile liniare reale $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}^2$, deci numărului complex arbitrar z din (5.13) îi corespunde punctul $M(x, y)$, sau vectorul $\mathbf{v}$ din (5.15). Prin urmare, un număr complex poate fi figurat în plan. Punctul $M(x, y)$ se numeşte *imaginea* numărului complex $z = x + iy$, iar z se numeşte *afixul* punctului $M(x, y)$.

Cele două spaţii liniare descrise mai sus, fiind izomorfe, proprietăţile unuia se transmit prin izomorfism şi celuilalt.

Odată stabilit izomorfismul între $\mathbb{C}$ şi $\mathbb{R}^2$, axei Ox i se spune *axa reală* iar axa Oy poartă denumirea de *axă imaginară*. Numerele reale, care constituie o submulţime a numerelor complexe, au imaginile pe axa Ox, iar numerele pur imaginare $z = iy$ au ca imagini puncte de forma $M(0, y) \in Oy$.

Se ştie că $\|\mathbf{v}\| = \|\ \overrightarrow{OM}\ \| = \sqrt{x^2 + y^2}$ este o normă pe $\mathbb{R}^2$ (norma euclidiană). În baza izomorfismului (5.16), funcţia

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\forall)\ z = (x, y) \in \mathbb{C}, \tag{5.17}$$

este o normă pe $\mathbb{C}$, deci

$$\text{cuplul} \quad (\mathbb{C}, |\cdot|) \quad \text{este } \textbf{spaţiu normat}. \tag{5.18}$$

Cum orice spaţiu normat este şi spaţiu metric, rezultă că mulţimea $\mathbb{C}$ este spaţiu metric, metrica d fiind cea indusă de norma (5.18)

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \qquad d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \tag{5.19}$$

unde $z_1 = x_1 + iy_1$ şi $z_2 = x_2 + iy_2$ sunt numere complexe arbitrare.

Aşadar, putem considera că $\mathbb{C}$ este o mulţime de puncte.

În consecinţă, toate rezultatele stabilite pentru spaţii liniare, spaţii normate şi spaţii metrice sunt adevărate şi în mulţimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe.

De exemplu, *discul deschis* (bila deschisă) cu centrul în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$ şi raza $r > 0$ este mulţimea $B(z_0, r) \subset \mathbb{C}$, unde

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| < r\}, \tag{5.20}$$

iar

$$\overline{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z - z_0| \le r\} \tag{5.21}$$

este *discul închis* cu centrul în z_0 şi rază r.

Cu ajutorul bilei deschise putem introduce noţiunea de vecinătate a punctului z_0.

Definiţia 5.1.3 *Mulţimea nevidă $V \subset \mathbb{C}$ se numeşte* **vecinătate** *a punctului $z_0 \in \mathbb{C}$ dacă există $r > 0$ astfel încât $B(z_0, r) \subset V$. Mulţimea $\mathcal{V}(z_0)$, a tuturor vecinătăţilor punctului $z_0 \in \mathbb{C}$, se numeşte* **sistemul de vecinătăţi** *a punctului z_0.*

Folosind vecinătăţile, putem defini în $\mathbb{C}$ toate noţiunile topologice întâlnite în teoria spaţiilor metrice.

Amintim pe cele care pot fi utilizate în studiul funcţiilor complexe de o variabilă complexă: *punct aderent*; *punct interior*; *punct exterior*; *punct frontieră*; *punct de acumulare*; *punct izolat*, ale unei mulţimi $E \subset \mathbb{C}$.

Folosindu–le apoi pe acestea, se pot defini alte noţiuni de topologie, precum: *închiderea* unei mulţimi; mulţime *închisă*; *interiorul* unei mulţimi; mulţime *deschisă*; *exteriorul* unei mulţimi; *frontiera* unei mulţimi; mulţime *mărginită*; mulţime *conexă*; *domeniu* (o mulţime $E \subset \mathbb{C}$ deschisă şi conexă); *continuu* (o mulţime de numere complexe închisă şi conexă), mulţime *compactă* (o mulţime $E \subset \mathbb{C}$ mărginită şi închisă).

Aceste noţiuni topologice constituie un motiv al recapitulării aceloraşi noţiuni introduse în teoria spaţiilor metrice din analiza matematică .

În încheiere, prezentăm alte exprimări ale unui număr complex $z = x + iy$.

În acest scop, introducem unghiul $\theta = \operatorname{Arg} z$ (măsurat în radiani, între 0 şi 2π, în sens direct trigonometric) dintre versorul $\mathbf{i}$ al axei Ox şi vectorul $\overrightarrow{OM}$, unde $M(x, y)$. Atunci, x şi y, care sunt mărimile algebrice ale proiecţiei vectorului $\overrightarrow{OM}$ pe versorii axelor Ox şi Oy, se exprimă cu ajutorul distanţei $|z|$ între punctele O şi M şi unghiul $\operatorname{Arg} z$ astfel:

$$x = |z| \cos \operatorname{Arg} z; \quad y = |z| \sin \operatorname{Arg} z. \tag{5.22}$$

Relaţiile (5.22) şi (5.13) conduc la exprimarea

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z), \tag{5.23}$$

care se numeşte *forma trigonometrică* a numărului complex $z = x + iy$.

În cele ce urmează vom vedea că

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\,\theta}, \tag{5.24}$$

de unde deducem forma

$$z = |z|\,e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}, \tag{5.25}$$

numită *forma exponenţială* numărului complex z.

Dacă în relaţia (5.24) trecem θ în $-\theta$ şi ţinem cont de proprietăţile funcţiilor trigonometrice, rezultă că avem

$$\cos\theta - i\sin\theta = e^{-\,i\,\theta}. \tag{5.26}$$

Din (5.24) şi (5.26), găsim:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2\,i}, \tag{5.27}$$

cunoscute sub numele de *formulele lui Euler*.

5.2 Funcţii de o variabilă complexă

Fie $\mathcal{F}(E, \mathbb{C})$ mulţimea funcţiilor definite pe mulţimea nevidă $E \subset \mathbb{C}$ cu valori în spaţiul metric $(\mathbb{C}, d)$, ale cărei elemente sunt *funcţii complexe de o variabilă complexă.*

Deoarece mulţimea $\mathbb{C}$ este spaţiu metric, orice mulţime nevidă $E \subset \mathbb{C}$ este, de asemenea, spaţiu metric, metrica pe E fiind cea indusă de metrica pe $\mathbb{C}$. Aşadar, o funcţie complexă de variabilă complexă este o funcţie definită pe un spaţiu metric cu valori într–un alt spaţiu metric astfel că toate rezultatele legate de limita într–un punct şi continuitatea unei funcţii definită pe un spaţiu metric, cu valori într–un alt spaţiu metric, sunt valabile şi pentru aceste funcţiii.

Cum punctele unui plan euclidian raportat la un reper cartezian de axe se pot identifica cu imaginile numerelor complexe, mulţimea E de definiţie a funcţiei complexe de variabilă complexă f poate fi considerată şi ca submulţime a spaţiului $\mathbb{R}^2$.

Dacă pentru funcţia complexă de variabilă complexă

$$w = f(z), \quad z \in E, \quad w \in \mathbb{C}, \tag{5.28}$$

se evidenţiază *partea reală* $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y)$ şi *partea imaginară* $\operatorname{Im} f(z) = v(x,y)$ rezultă că pentru valorile funcţiei f putem utiliza şi notaţia

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y). \tag{5.29}$$

Din (5.28) şi (5.29) rezultă că funcţia $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{C})$, cu $E \subset \mathbb{C}$, este determinată atunci şi numai atunci când se cunosc funcţiile reale $u(x,y)$ şi $v(x,y)$, ambele definite pe mulţimea $E \subset \mathbb{R}^2$.

În cele ce urmează, pentru o funcţie complexă de variabilă complexă vom utiliza denumirea de *funcţie complexă* şi vom nota mulţimea sa de definiţie cu D dacă este un domeniu.

5.3 Funcţie monogenă într–un punct

Fie funcţia complexă $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ şi $z_0 \in D$.

Definiţia 5.3.1 *Funcţia complexă de variabilă complexă*

$$\rho \in \mathcal{F}(D \setminus \{z_0\}, \mathbb{C}), \quad \rho(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{5.30}$$

se numeşte **raportul incrementar în punctul** z_0 *al funcţiei* f.

Definiţia 5.3.2 *Spunem că funcţia complexă* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ *este* **monogenă** *sau* **derivabilă** *în punctul* $z_0 \in D$, *dacă funcţia raport incrementar în punctul* z_0 *al funcţiei* f *are limită în punctul* z_0.

Definiţia 5.3.3 *Dacă funcţia complexă* f *este monogenă în* z_0, *atunci limita în* z_0 *a funcţiei* (5.30), *notată cu* $f'(z_0)$, *se numeşte* **derivata** *funcţiei* f *în punctul* z_0.

Aşadar, dacă funcţia complexă f este derivabilă în z_0, derivata sa în punctul z_0 este

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \tag{5.31}$$

Teorema 5.3.1 *O funcţie monogenă în* z_0 *este continuă în acest punct.*

Demonstraţie. Valoarea funcţiei complexe f într–un punct $z \neq z_0$ poate fi scrisă în forma

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0).$$

Trecând la limită în această egalitate pentru $z \to z_0$, obţinem

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) + \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z\to z_0} (z - z_0) = f(z_0),$$

ceea ce arată că funcţia $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ este continuă în z_0. ■

Exemplul 5.3.1 *Funcţia complexă*

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2$$

este monogenă în orice punct $z \in \mathbb{C}$ *şi* $f'(z) = 2z$.

Soluţie. Într-adevăr, considerând un punct arbitrar fixat z_0, funcţia ρ din (5.30) corespunzătoare funcţiei $f(z) = z^2$ este $\rho(z) = \dfrac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = z + z_0$ de unde, prin trecere la limită pentru $z \to z_0$, se obţine $f'(z_0) = 2z_0$. Deoarece z_0 este ales arbitrar, rezultă că f este monogenă în orice punct $z \in \mathbb{C}$ şi $f'(z) = 2z$. ■

Exemplul 5.3.2 *Funcţia* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sin z$ *este monogenă în orice* $z \in \mathbb{C}$ *şi* $f'(z) = \cos z$.

Soluţie. Într-adevăr, raportul incrementar (5.30) al funcţiei $f(z)$ are limita $\cos z_0$ în punctul arbitrar $z_0 \in \mathbb{C}$, ceea ce arată că $(\sin z)' = \cos z$. ■

5.4 Condiţiile Cauchy–Riemann

Teorema 5.4.1 *Dacă funcţia complexă* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ *din* (5.29) *este monogenă în punctul* $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, *atunci funcţiile reale de două variabile reale* $u, v \in \mathcal{F}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, *sunt derivabile în punctul* (x_0, y_0), *derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor* u *şi* v *în* (x_0, y_0) *satisfac condiţiile Cauchy–Riemann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{cases} \tag{5.32}$$

iar derivata funcţiei f *în punctul* z_0 *se calculează după una din formulele:*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0); \tag{5.33}$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Big). \tag{5.34}$$

Demonstraţie. Cum f este monogenă în punctul z_0, există limita în z_0 a raportului incrementar (5.30) şi această limită este $f'(z_0)$. Ţinând cont de expresia (5.29), rezultă că

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}. \tag{5.35}$$

Să considerăm întâi că $z \to z_0$ pe o paralelă la una din axele de coordonate. Dacă această paralela este la axa Ox, atunci $y = y_0$ şi $z \to z_0$ este echivalent cu $x \to x_0$, încât (5.35) devine

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}. \tag{5.36}$$

Din (5.36) rezultă că există limitele din membrul al doilea şi:

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} &= \operatorname{Re} f'(z_0); \\ \displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} &= \operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases} \tag{5.37}$$

Relaţiile din (5.37) arată că funcţiile reale u şi v de variabilele reale x şi y sunt derivabile parţial în punctul (x_0, y_0) în raport cu variabila x şi aceste derivate parţiale sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \operatorname{Re} f'(z_0); \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) &= \operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases} \tag{5.38}$$

Apoi, dacă $z \to z_0$ pe o paralelă la axa Oy, atunci $x = x_0$, $z \to z_0$ este echivalent cu $y \to y_0$ şi (5.35) devine

$$f'(z_0) = \frac{1}{i}\Big(\lim_{y\to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} + i \lim_{y\to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0}\Big). \tag{5.39}$$

Din (5.39) deducem că că funcţiile reale u şi v de variabilele reale x şi y sunt derivabile parţial în punctul (x_0, y_0) în raport cu variabila y şi că aceste

derivate parţiale sunt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) & = & \operatorname{Re} f'(z_0); \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & = & - \operatorname{Im} f'(z_0). \end{cases} \tag{5.40}$$

Din (5.38) şi (5.40) rezultă condiţiile Cauchy–Riemann (5.32) iar dacă ţinem cont că $f'(z_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0)$, rezultă că au loc (5.33) şi (5.34). ■

Teorema 5.4.2 *Dacă funcţiile reale* $u, v \in \mathcal{F}(D)$, *sunt derivabile într–o vecinătate a punctului* $(x_0, y_0) \in D \subset I\!R^2$, *iar derivatele parţiale de ordinul întâi ale lor sunt continue în* (x_0, y_0) *şi satisfac în acest punct condiţiile Cauchy–Riemann* (5.32), *atunci funcţia complexă* (5.29) *este monogenă în* $z_0 = x_0 + i\, y_0$.

Demonstraţie. Din ipoteze rezultă că funcţiile u şi v sunt diferenţiabile în punctul $(x_0, y_0) \in D$, deci există funcţiile reale α şi β de variabilele reale x şi y, definite pe D, continue în (x_0, y_0) şi egale cu zero în acest punct, astfel încât creşterile:

$$\Delta u = u(x, y) - u(x_0, y_0); \quad \Delta v = v(x, y) - v(x_0, y_0), \tag{5.41}$$

ale respectiv funcţiilor u şi v, corespunzătoare creşterilor

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \tag{5.42}$$

să fie

$$\begin{cases} \Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(x, y)|z - z_0|, \\ \Delta v = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \beta(x, y)|z - z_0|. \end{cases} \tag{5.43}$$

Să evaluăm creşterea funcţiei f în z_0 corespunzătoare creşterii $\Delta z = z - z_0$,

$$\Delta f(z_0, \Delta z) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0). \tag{5.44}$$

Folosind (5.29) şi (5.41) rezultă că această creştere este

$$\Delta f(z_0, \Delta z) \;\; = \;\; \Delta u + i\Delta v. \tag{5.45}$$

Înlocuind în (5.45) expresiile (5.43) şi ţinând cont de condiţiile Cauchy–Riemann (5.32), obţinem

$$\Delta f(z_0,\Delta z) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\Big)\cdot \Delta z + (\alpha + i\,\beta)\cdot|\Delta z|. \quad (5.46)$$

Împărţind ambii membri ai egalităţii (5.46) prin Δz şi trecând la limită pentru $\Delta z \to 0$, obţinem

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)+\lim_{\Delta z\to 0}\Big((\alpha+i\,\beta)\cdot\frac{|\Delta z|}{\Delta z}\Big). \quad (5.47)$$

Deoarece funcţia $\alpha+i\beta$ are limita zero în z_0, iar funcţia $\dfrac{|\Delta z|}{\Delta z}$ este mărginită, avem

$$\lim_{\Delta z\to 0}(\alpha + i\,\beta)\cdot\frac{|\Delta z|}{\Delta z} = 0. \quad (5.48)$$

Din (5.47) şi (5.48) rezultă că raportul incrementar în z_0 al funcţiei f are limită în punctul z_0 şi aceasta este

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0). \quad (5.49)$$

Aşadar, funcţia f este monogenă în z_0 şi derivata sa în z_0 este (5.33).

Dacă în (5.47) folosim condiţiile Cauchy–Riemann ajungem la concluzia

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0,\Delta z)}{\Delta z} = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\Big) + \lim_{\Delta z\to 0}\Big((\alpha + i\,\beta)\cdot\frac{|\Delta z|}{\Delta z}\Big),$$

de unde, prin trecere la limită pentru $\Delta z \to 0$, se obţine că derivata funcţiei f în punctul z_0 este (5.34). ■

Exerciţiul 5.4.1 *Să se determine punctele $z = x + iy$ în care funcţiile de mai jos sunt monogene şi să se calculeze derivatele în punctele determinate:*

$$\mathbf{1^0}.\quad f(z) = x^2 - 4xy + y + i(3x - y^2);$$

$$\mathbf{2^0}.\quad f(z) = z^2 + 2z\overline{z} - 2\overline{z}^2 + 3z + 2\overline{z},$$

unde $\overline{z} = x - iy$ este **conjugatul** *numărului complex $z = x + iy$.*

Soluţie. $\mathbf{1^0}$. Partea reală a funcţiei f este $u(x,y) = x^2 - 4xy + y$, iar cea imaginară este $v(x,y) = 3x - y^2$. Ecuaţiile Cauchy–Riemann sunt

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2y \\ -4x + 1 = -3. \end{cases}$$

Cum soluţia acestui sistem este $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ rezultă că funcţia dată este monogenă în punctul $z_0 = 1 + i$ şi

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = -2 + 3i.$$

2^0. Funcţia se scrie

$$f(z) = x^2 + 3y^2 + 5x + i(6xy + y),$$

iar condiţiile Cauchy–Riemann conduc la sistemul

$$\begin{cases} 2x + 5 &= 6x + 1 \\ 6y &= -6y, \end{cases}$$

de unde rezultă soluţia $x_0 = 1, y_0 = 0$. Aşadar, funcţia dată este monogenă numai în punctul $z_0 = 1 + i \cdot 0 = 1$.

Derivata funcţiei f în z_0 este $f'(z_0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,0) + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 7.$ ■

5.5 Funcţie olomorfă. Proprietăţi

Definiţia 5.5.1 *Funcţia complexă* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ *se numeşte* **olomorfă** *pe* D *dacă este monogenă în fiecare punct* $z \in D$.

Definiţia 5.5.2 *Dacă* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ *este olomorfă pe* D, *atunci funcţia*

$$f' : D \to \mathbb{C}, \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{5.50}$$

se numeşte **derivata** *funcţiei* f.

Observaţia 5.5.1 *Din Teorema* 5.4.1*deducem că dacă* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ *este funcţie olomorfă pe* D, *atunci derivata* $f'(z)$ *are una din următoarele expresii:*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \quad (\forall)\ z = x + i\,y \in D; \tag{5.51}$$

$$f'(z) = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Big), \quad (\forall)\ z = x + i\,y \in D. \tag{5.52}$$

Teorema 5.5.1 *Dacă $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ este funcţie olomorfă pe D şi $f'(z) = 0$, $(\forall)$ $z \in D$, atunci $f(z) = const.$ pe D.*

Demonstraţie. Într-adevăr, din $f'(z) = 0$, (5.51) şi (5.52) rezultă că în orice punct $(x, y) \in D$ sunt satisfăcute egalităţile

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$$

şi deci diferenţialele funcţiilor u şi v sunt nule pe D. Aşadar, $u(x, y) = C_1$, $v(x, y) = C_2$, de unde rezultă $f(z) = C_1 + i\, C_2$. ■

Teorema 5.5.2 *Dacă funcţia complexă $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ este olomorfă pe domeniul $D \subset \mathbb{C}$ şi $u, v \in C^2(D)$, atunci u şi v sunt funcţii armonice.*

Demonstraţie. Deoarece funcţia f este olomorfă pe D, u şi v verifică condiţiile Cauchy–Riemann pe D

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases} \tag{5.53}$$

Dar, în baza criteriului lui Schwarz de egalitate a derivatelor parţiale mixte, avem că derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea ale oricărei din funcţiile u şi v sunt egale şi deci putem scrie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x,y); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}(x,y), \quad (\forall)\ (x,y) \in D. \tag{5.54}$$

Derivând prima relaţie (5.53) în raport cu x, a doua în raport cu y, adunând şi ţinând cont de a doua relaţie (5.54), obţinem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad (\forall)\ (x,y) \in D, \tag{5.55}$$

care arată că u este funcţie armonică.

În mod analog obţinem că v este funcţie armonică, deci că

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad (\forall)\ (x,y) \in D. \tag{5.56}$$

■

Cu ajutorul operatorului lui Laplace $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, relaţiile (5.55) şi (5.56) se scriu:

$$\nabla^2 u = 0; \quad \nabla^2 v = 0, \tag{5.57}$$

fiecare din ele exprimând că, în ipoteze suplimentare de regularitate, partea reală şi partea imaginară a unei funcţii olomorfe sunt funcţii armonice.

Teorema 5.5.3 (Determinarea unei funcţii olomorfe când se cunoaşte partea sa reală) *Dată o funcţie armonică $u = u(x, y)$, $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, există funcţii olomorfe pe D de forma $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ şi oricare două asemenea funcţii diferă printr–o constantă pur imaginară iC, unde $C \in \mathbb{R}$.*

Demonstraţie. Cum partea reală este cunoscută, pentru a determina funcţia olomorfă f trebuie să determinăm partea ei imaginară v. Funcţia v trebuie să fie tot armonică şi legată de funcţia u prin relaţiile Cauchy–Riemann (5.53).

Dacă în diferenţiala funcţiei v

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

ţinem cont de relaţiile Cauchy–Riemann (5.53), deducem

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy. \tag{5.58}$$

Dar, expresia diferenţială din membrul doi al relaţiei (5.58) este o diferenţială totală exactă, deorece condiţia de integrabilite

$$-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big), \quad (\nabla^2 u = 0) \tag{5.59}$$

este verificată în baza faptului că u este funcţie armonică. Relaţia (5.59) arată că integrala curbilinie din expresia diferenţială a membrului doi din (5.58) este independentă de drum, depinzând doar de extremităţile acestuia. Integrând (5.58) pe un drum paralel cu axele de coordonate cu extremităţile $M_0(x_0, y_0)$ fixat şi $M(x, y)$ variabil, obţinem

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt. \tag{5.60}$$

Astfel, funcţia v se determină până la o constantă arbitrară care poate fi determinată dacă se cunoaşte valoarea funcţiei olomorfe $f(z)$ într–un punct $z_0 = x_0 + i\,y_0$.

Asemănător se demonstrează şi cazul în care se dă partea imaginară $v = v(x, y)$, funcţie armonică pe D. Şi în acest caz funcţia $f(z)$ se determină până la o constantă reală aditivă. În adevăr, avem

$$-i\,f(z) = v(x, y) - i\,u(x, y)$$

şi cum funcţia are ca parte reală chiar $v(x, y)$, suntem conduşi la problema precedentă. Formula de determinare a funcţiei u este asemănătoare celei din (5.60) şi are forma

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v}{\partial y}(t, y_0)dt - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)dt. \tag{5.61}$$

Se vede că funcţia f este determinată până la o constantă arbitrară care se poate determina dacă se cunoaşte valoarea funcţiei f în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$. ■

Exerciţiul 5.5.1 *Să se determine funcţia olomorfă $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a cărei parte reală este funcţia $u(x, y) = e^x \cos y$ şi care în $z = 0$ are valoarea $f(0) = 1$.*

Soluţie. Mai întâi se verifică că u este funcţie armonică. Apoi, luând în (5.60) pe $x_0 = 0$, şi $y_0 = 0$, adică $z_0 = 0$, avem că partea imaginară a funcţiei f este

$$v(x, y) = v(0, 0) + \int_0^x e^t \sin 0\,dt + \int_0^y e^x \cos t\,dt.$$

Ţinând cont că $f(0) = 1$, deducem $v(0, 0) = 0$ şi deci

$$v(x, y) = e^x \int_0^y \cos t\,dt = e^x \sin y.$$

Prin urmare, $f(z) = e^x \cos y + i\,e^x \sin y$. Din (5.24) rezultă $\cos y + i\,\sin y = e^{iy}$ şi dacă ţinem cont că $e^x e^{iy} = e^{x+i\,y} = e^z$, avem că $f(z) = e^z$. Aceasta este funcţia exponenţială din complex care va fi studiată într–un paragraf ulterior. ■

Exerciţiul 5.5.2 *Să se determine funcţia olomorfă $f : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ a cărei parte imaginară este funcţia $v(x, y) = e^x \sin y + \dfrac{y}{x^2 + y^2}$ şi care în $z = 1$ are valoarea $f(1) = 1$.*

Soluţie. Verificăm mai întâi dacă funcţia $v(x,y)$ este armonică. Pentru derivatele parţiale de ordinul întâi găsim expresiile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= e^x \sin y - \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= e^x \cos y + \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \end{cases}$$

iar pentru cele de ordinul al doilea nemixte, avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) &= e^x \sin y + 2y\dfrac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) &= -e^x \sin y - 2y\dfrac{3x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}, \end{cases}$$

de unde se vede că $\nabla^2 v(x,y) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$, ceea ce demonstrează că v este funcţie armonică.

Pentru determinarea funcţiei $u = u(x,y)$, aplicăm formula (5.61), luând $x_0 = 1, y_0 = 0$. Observăm că din $f(1) = 1$ avem $u(1,0) = 1$ şi (5.61) conduce la

$$u(x,y) = 1 + \int_1^x \Big(e^t + \frac{1}{t^2}\Big)dt + \int_0^y \Big(- e^x \sin t + \frac{2xt}{(x^2+t^2)^2}\Big)dt.$$

Integrând, rezultă

$$u(x,y) = 2 - e + e^x \cos y - \frac{x}{x^2+y^2},$$

deci

$$f(z) = 2 - e + e^x \cos y - \frac{x}{x^2+y^2} + i\Big(e^x \sin y + \frac{y}{x^2+y^2}\Big).$$

Există un procedeu simplu pentru a găsi expresia lui f în variabilă z şi acesta constă în trecerea lui x în z şi anularea lui y.

Aplicând acest procedeu expresiei de mai sus a funcţiei, obţinem

$$f(z) = 2 - e + e^z - \frac{1}{z}.$$

Constatăm că funcţia $f(z)$ a fost determinată exact deoarece s–a precizat şi valoarea sa într–un punct. ∎

Operaţiile cu funcţii olomorfe decurg din (5.50) şi rezultă că sunt asemănătoare proprietăţilor funcţiilor reale de o variabilă reală derivabile. Renunţând la scrierea variabilei z, avem:

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g';$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g';$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2};$$

$$(f \circ \varphi)' = f'(\varphi) \cdot \varphi';$$

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \text{ unde } w_0 = f(z_0) \text{ etc.}$$

Definiţia 5.5.3 **Diferenţiala** *unei funcţii olomorfe este*

$$df(z) = f'(z)\, dz \tag{5.62}$$

unde $dz = dx + i\, dy$.

Regulile de calcul cu diferenţiala din real sunt valabile şi în complex.

5.6 Puncte ordinare şi puncte singulare. Planul lui Gauss

Definiţia 5.6.1 *Un punct* $z \in D \subset \mathbb{C}$ *se numeşte* **punct ordinar** *pentru funcţia complexă* $f : D \to \mathbb{C}$ *dacă există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(z)$ *cu proprietatea* f *olomorfă pe mulţimea* $V \cap D$.

Definiţia 5.6.2 *Un punct* $z \in \mathbb{C}$ *care nu este punct ordinar pentru funcţia complexă* $f : D \to \mathbb{C}$ *se numeşte* **punct singular** *al funcţiei.*

Între punctele singulare ale unei funcţii complexe, remarcăm pe cele de tip pol.

Definiţia 5.6.3 *Punctul* $z = a \in \mathbb{C}$ *este un* **pol** *al funcţiei* $f : D \to \mathbb{C}$*, dacă există un număr natural* α*, numit* **ordinul polului***, astfel încât funcţia*

$$\varphi(z) = (z - a)^{\alpha} f(z)$$

să aibă în $z = a$ *un punct ordinar, iar* $\varphi(a) \neq 0$.

Observaţia 5.6.1 *Dacă $z = a$ este un pol de ordin α pentru funcţia complexă f, valorile funcţiei se scriu sub forma*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^\alpha},$$

unde $\varphi(a) \neq 0$ şi $z = a$ este un punct ordinar pentru funcţia complexă φ.

Dacă în Definiţia 5.6.3 avem $\alpha = 1$, polul se spune că este *simplu*. Dacă $\alpha = 2$, polul se numeşte *dublu*, ş. a. m. d.

Definiţia 5.6.4 *Un punct $z = a$ se numeşte* **zerou de ordin** n *al funcţiei $f : D \to \mathbb{C}$ dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ şi o funcţie $\psi : D \to \mathbb{C}$, olomorfă pe D, cu $\psi(a) \neq 0$, astfel încât*

$$f(z) = (z-a)^n \psi(z), \quad (\forall)\ z \in D.$$

Definiţia 5.6.5 *Prin* **punctul de la infinit al planului variabilei** z *se înţelege punctul corespunzător punctului $\zeta = 0$ din relaţia $z = \dfrac{1}{\zeta}$.*

Observaţia 5.6.2 *Planul complex conţine un singur punct la infinit; acesta se notează cu $z = \infty$.*

Definiţia 5.6.6 *Planul variabilei complexe z, completat cu punctul de la infinit, se numeşte* **planul complex** *sau* **planul lui Gauss**, *notat cu (z).*

Modulul numărului complex $z = \infty$ este ∞, iar argumentul său este nedeterminat. O vecinătate $|\zeta| < r$ a punctului $\zeta = \xi + i\eta = 0$ din planul $\xi O'\eta$ se transformă prin relaţia $z = \dfrac{1}{\zeta}$ în mulţimea punctelor z care satisfac inegalitatea $|z| > \dfrac{1}{r} = R$, deci în exteriorul discului închis, de rază R, cu centrul în originea planului complex (z). Inegalitatea $|z| > R$ reprezintă o *vecinătate a punctului de la infinit* în planul variabilei (z).

5.7 Funcţii elementare de o variabilă complexă

5.7.1 Funcţia polinom în planul complex

Cea mai simplă funcţie elementară nebanală este *funcţia polinomială de gradul $n \in \mathbb{N}$*

$$P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C},$$

unde $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sunt constante complexe.

Funcţia polinomială o vom numi adesea *polinom*.

Teorema 5.7.1 *Polinomul P este o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Evident, funcţia constantă este olomorfă şi are derivata nulă în orice punct din $\mathbb{C}$.

Funcţia identică $P(z) = z$ este, de asemenea, olomorfă şi derivata sa este egală cu 1 în orice $z \in \mathbb{C}$, deoarece

$$P'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{P(z + \Delta z) - P(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} = 1.$$

Funcţia putere naturală a lui z, cu valorile $f(z) = z^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, este un produs de k funcţii egale cu funcţia identică. Folosind definiţia unei funcţii monogene într–un punct şi definiţia unei funcţii olomorfe deducem că funcţia putere cu exponent $k \in \mathbb{N}^*$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ şi derivata sa are valorile $f'(z) = kz^{k-1}$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$.

Funcţia complexă ale cărei valori se calculează după legea $A_k z^k$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$ fiind produsul a două funcţii cu această proprietate. Polinomul P, fiind o sumă de funcţii de de forma $A_k z^k$, este o funcţie olomorfă pe $\mathbb{C}$.

Aplicând definiţia derivatei unei funcţii complexe într–un punct, găsim

$$P'(z) = A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \cdots + nA_n z^{n-1},$$

de unde se vede că derivata funcţiei polinom are aceeaşi formă ca în cazul real. ■

Reamintim o proprietate importantă a polinomului. Datorită faptului că $\mathbb{C}$ este un corp algebric închis, în sensul că toate rădăcinile unui polinom cu coeficienţi numere complexe sunt numere complexe, orice polinom de gradul $n > 1$ admite descompune în factori

$$P(z) = A_n (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_p)^{m_p}, \quad m_k \in \mathbb{N}^*,$$

unde $z_1, z_2, \ldots, z_p \in \mathbb{C}$ radăcini distincte de respectiv multiplicităţi m_1, m_2, $\cdots$, m_p, cu $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$.

Aşadar, zerourile funcţiei polinom formează o mulţime discretă în sensul că fiecare element al acesteia este un punct izolat al domeniului de definiţie al unei funcţii polinom. Se poate demonstra un rezultat mai general, şi anume

Teorema 5.7.2 *Dacă f este o funcţie olomorfă pe un domeniu D, mulţimea zerourilor sale conţinute în D este discretă.*

Se mai spune că *zerourile unei funcţii olomorfe sunt puncte izolate.*

După ce vom studia şi funcţia raţională, vom cerceta natura punctului de la infinit pentru funcţia polinom de gradul n şi vom arăta că este un *pol de ordin* n.

5.7.2 Funcţia raţională

Fie P şi Q două funcţii polinomiale definite pe $\mathbb{C}$ cu valori în $\mathbb{C}$,

$$P(z) = A_0 + A_1 z + \cdots + A_n z^n, \quad Q(z) = B_0 + B_1 z + \cdots + B_m z^m.$$

Fie $a, b, \ldots, \ell \in \mathbb{C}$ rădăcinile distincte ale polinomului Q şi $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ordinele lor de multiplicitate. Atunci,

$$Q(z) = B_m (z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\cdots(z-\ell)^{\lambda}.$$

Definiţia 5.7.1 *Funcţia complexă de variabilă complexă* $f = \dfrac{P}{Q}$, *definită pe domeniul* $\mathbb{C} \setminus \{a, b, \ldots, \ell\}$, *se numeşte* **funcţie raţională**.

În cazul când Q este un polinom nenul de grad zero (o constantă complexă), funcţia raţională corespunzătoare se reduce la o funcţie polinom care se mai numeşte *funcţie raţională întreagă.*

Teorema 5.7.3 *Funcţia raţională în complex* $f = \dfrac{P}{Q}$ *este olomorfă pe domeniul* $D = \mathbb{C} \setminus \{a, b, \ldots, \ell\}$.

Demonstraţie. Funcţiile polinom P şi Q, cu ajutorul cărora se defineşte funcţia raţională f, sunt funcţii olomorfe pe $\mathbb{C}$. Câtul a două funcţii olomorfe, acolo unde el există, este o funcţie olomorfă. Prin urmare, funcţia raţională $f = \dfrac{P}{Q}$ este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \{a, b, \ldots, \ell\}$. ■

Observaţia 5.7.1 *Dacă* $f = \dfrac{P}{Q}$ *este o funcţie raţională definită pe domeniul* $D = \{z \in \mathbb{C} |\ Q(z) \neq 0\}$ *şi* $a, b, \ldots, \ell$ *sunt rădăcinile distincte ale polinomului* Q, *iar* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ *sunt respectiv ordinele lor de multiplicitate, atunci punctul* $z = a$ *este un pol de ordin* α, $z = b$ *este un pol de ordin* β, $\cdots$, $z = \ell$ *este un pol de ordinul* λ *pentru funcţia raţională* f.

Să cercetăm comportarea funcţiei raţionale în punctul de la infinit.

Pentru aceasta, în $f(z)$ trecem pe z în $\dfrac{1}{\zeta}$ şi avem

$$f\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)=\frac{A_0+\dfrac{A_1}{\zeta}+\cdots+\dfrac{A_n}{\zeta^n}}{B_0+\dfrac{B_1}{\zeta}+\cdots+\dfrac{B_m}{\zeta^m}}=\frac{\zeta^m}{\zeta^n}\cdot\frac{A_n+A_{n-1}\zeta+\cdots+A_1\zeta^{n-1}+A_0\zeta^n}{B_m+B_{m-1}\zeta+\cdots+B_1\zeta^{m-1}+B_0\zeta^m}.$$

Cercetăm natura punctului $\zeta=0$ pentru noua funcţie.
Distingem două cazuri, şi anume:

- $n>m$, $\zeta=0$ este un pol de ordin $n-m$;
- $n\leq m$, $\zeta=0$ este un punct ordinar.

Deci, funcţia raţională are în punctul de la infinit un pol sau un punct ordinar, după cum gradul numărătorului este mai mare ori mai mic sau egal cu gradul numitorului. Am demonstrat

Teorema 5.7.4 *Funcţia raţională nu are alte singularităţi în planul complex (z) decât poli.*

Funcţia polinom este un caz particular de funcţie raţională pentru care $m=0$.
Folosind Teorema 5.7.4 deducem că funcţia polinom de gradul n are în punctul de la infinit un pol de ordin n.

5.7.3 Funcţia exponenţială

Vom determina o funcţie complexă f de variabila complexă $z=x+iy$, care să satisfacă axiomele:

1. să fie funcţie olomorfă în tot planul complex din care se exclude punctul de la infinit;
2. să satisfacă relaţia funcţională $f(z_1+z_2)=f(z_1)\cdot f(z_2)$, $(\forall)\ z_1,z_2\in(z)\setminus\{\infty\}$;
3. restricţia funcţiei f la axa reală să fie funcţia exponenţială reală e^x, adică $f(\operatorname{Re}z)=e^{\operatorname{Re}z}=e^x$;
4. valoarea în z a funcţiei conjugate $\overline{f}$ să fie egală cu valoarea funcţiei f în conjugatul complex a lui z, adică $\overline{f}(z)=f(\overline{z})$, $(\forall)\ z\in(z)\setminus\{\infty\}$.

Să calculăm pătratul modulului valorii în $z = x+iy$ a funcţiei f care satisface axiomele de mai sus. Avem

$$|f(z)|^2 = f(z)\cdot\overline{f}(z) = f(z)\cdot f(\overline{z}) = f(z+\overline{z}) = f(2x) = e^{2x},$$

de unde $|f(z)| = e^x$.

Având în vedere că orice număr complex se poate scrie sub formă trigonometrică şi notând cu $\varphi(x,y)$ argumentul lui $f(z)$, rezultă că

$$f(z) = e^x(\cos\varphi(x,y) + i\,\sin\varphi(x,y)).$$

Partea reală $u(x,y)$ şi partea imaginară $v(x,y)$ a lui $f(z)$ sunt

$$u(x,y) = e^x\cos\varphi(x,y),\quad v(x,y) = e^x\sin\varphi(x,y).$$

Cum f este funcţie olomorfă, u şi v trebuie să satisfacă condiţiile Cauchy–Riemann (5.32), deci

$$\begin{cases} e^x\Big(\cos\varphi(x,y) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\cdot\sin\varphi(x,y)\Big) & = & e^x\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\cdot\cos\varphi(x,y),\\ e^x\Big(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\cdot\cos\varphi(x,y) + \sin\varphi(x,y)\Big) & = & e^x\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\cdot\sin\varphi(x,y).\end{cases}$$

După simplificare cu e^x, obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \cos\varphi(x,y) - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\cdot\sin\varphi(x,y) & = & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\cdot\cos\varphi(x,y),\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\cdot\cos\varphi(x,y) + \sin\varphi(x,y) & = & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)\cdot\sin\varphi(x,y)\end{cases}$$

pe care–l interpretăm ca un sistem algebric liniar şi neomogen în necunoscutele $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ şi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$. Soluţia acestui sistem este

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = 0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = 1$$

şi deci diferenţiala funcţiei φ este egală cu dy, ceea ce arată că $\varphi(x,y)$ diferă de y printr–o constantă. Aşadar, $\varphi(x,y) = y + C$, unde C este o constantă reală arbitrară. Impunând acum a treia axiomă, adică $f(\mathrm{Re}\,z) = e^{\mathrm{Re}\,z}$,

ceea ce revine la a face $y = 0$ în expresia lui $f(z)$ sub formă trigonometrică, obţinem

$$e^x(\cos C + i\sin C) = e^x \Longrightarrow \cos C + i\sin C = 1 \Longrightarrow \begin{cases} \cos C &= 1, \\ \sin C &= 0. \end{cases}$$

O soluţie a ultimului sistem este $C = 0$ şi deci $\varphi(x, y) = y$. Aşadar, expresia funcţiei căutate este

$$f(z) = e^x(\cos y + i\,\sin y).$$

Notăm această funcţie cu e^z şi o numim *funcţia exponenţială*. Prin urmare,

$$e^z = e^x(\cos y + i\,\sin y).$$

Dacă în această egalitate punem $x = 0$, deducem

$$e^{i\,y} = \cos y + i\,\sin y.$$

Trecând pe y în $-y$, avem şi

$$e^{-i\,y} = \cos y - i\,\sin y.$$

Din ultimele două relaţii se obţin *formulele lui Euler*:

$$\cos y = \frac{e^{i\,y} + e^{-i\,y}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{i\,y} - e^{-i\,y}}{2\,i}.$$

Partea reală a funcţiei exponenţiale este $u(x, y) = e^x \cos y$, iar partea imaginară este $v(x, y) = e^x \sin y$. Derivatele parţiale în raport cu x ale acestor funcţii sunt

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y = u(x, y), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y = v(x, y). \tag{5.63}$$

Teorema 5.7.5 *Derivata funcţiei exponenţiale* $f(z) = e^z$ *este*

$$f'(z) = f(z) = e^z, \quad (\forall)\ z \in (z) \setminus \{\infty\}. \tag{5.64}$$

Demonstraţie. Dacă se aplică una din formulele de calcul ale derivatei unei funcţii complexe, de exemplu

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

şi se ţine cont de (5.63), se obţine (5.64). ■

Teorema 5.7.6 *Funcţia exponenţială este periodică şi perioada principală este* $T_1 = 2\pi i$.

Demonstraţie. Dacă există $T = A + i\,B \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, astfel încât $f(z+T) = f(z)$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$, aceasta revine la

$$e^{x+A}(\cos{(y+B)} + i\,\sin{(y+B)}) = e^{x}(\cos y + i\,\sin y), \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C}.$$

Pentru aceasta este necesar şi suficient ca

$$e^{x+A} = e^{x}, \quad y + B = y + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}.$$

Din prima egalitate rezultă $A = 0$, iar din a doua $B = 2k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}^*$. Aşadar, T poate lua toate valorile $T_k = 2k\pi i$, cu $k \in \boldsymbol{Z}^*$. $T_1 = 2\pi i$, este perioada principală. ∎

5.7.4 Funcţiile circulare şi funcţiile hiperbolice

Definiţia 5.7.2 *Pe mulţimea numerelor complexe* $\mathbb{C}$ *definim următoarele funcţii:*

- **funcţiile circulare cosinus** *şi* **sinus***, notate* cos*, respectiv* sin*, cu valorile*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C}; \tag{5.65}$$

- *funcţiile* **cosinus hiperbolic** *şi* **sinus hiperbolic***, notate* cosh*, respectiv* sinh*, cu valorile*

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C}. \tag{5.66}$$

Observaţia 5.7.2 *Funcţiile definite în* (5.65) *sunt prelungiri în* $\mathbb{C}$ *ale funcţiilor reale date în* (5.27). *O observaţie similară are loc şi pentru funcţiile hiperbolice.*

Teorema 5.7.7 *Funcţiile circulare şi funcţiile hiperbolice au următoarele proprietăţi:*

- *sunt funcţii olomorfe pe* $\mathbb{C}$ *ale căror derivate sunt:*

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z;$$

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z;$$

- *funcţiile circulare* cos *şi* sin *au aceleaşi perioade ca restricţiile lor la* $\mathbb{R}$, *iar perioada lor principală este* 2π. *Funcţiile hiperbolice au periaodele* $T_k = k \cdot 2\pi i$, $k \in \mathbb{Z}^*$, *perioada principală fiind* $2\pi i$;

- *între funcţiile circulare şi funcţiile hiperbolice există relaţiile*

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C}; \tag{5.67}$$

- *zerourile funcţiilor circulare sunt numere reale şi coincid cu zerourile restricţiilor lor la* $\mathbb{R}$,

$$\cos z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad \sin z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

  iar cele ale funcţiilor hiperbolice sunt:

$$\cosh z = 0 \Longrightarrow z = i\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big); \quad \sinh z = 0 \Longrightarrow z = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstraţie. Funcţiile e^{-z}, e^{iz}, e^{-iz} rezultă din compunerea unor funcţii elementare olomorfe pe $\mathbb{C}$. În consecinţă, funcţiile $\cos z$, $\sin z$, $\cosh z$, $\sinh z$ sunt olomorfe pe $\mathbb{C}$, fiind combinaţii liniare de funcţii olomorfe pe $\mathbb{C}$. Pentru calculul derivatelor acestor funcţii folosim operaţiile cu funcţii olomorfe. Avem

$$(\cos z)' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

Celelalte formule de derivare se obţin analog.

Pentru determinarea perioadei funcţiei $\cos z$ se procedează ca în Teorema 5.7.6. Aşadar încercăm să determinăm $T \neq 0$, astfel încât să avem

$$\cos(z + T) = \cos z, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C},$$

de unde se găseşte $T_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Perioada principală se obţine pentru $k = 1$.

Pentru celelalte funcţii se procedează similar.

Din (5.65) rezultă

$$\cos iz = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z, \quad \sin iz = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i \sinh z.$$

Pentru determinarea zerourilor funcţiei $f(z) = \cos z$, rezolvăm ecuaţia $\cos z = 0$. Aceasta conduce la $e^{iz} + e^{-iz} = 0$ care este echivalentă cu ecuaţia

$e^{2iz} = -1$. Punând $z = x + iy$ şi comparând modulele şi argumentele, se obţine sistemul

$$\begin{cases} e^{-2y} & = & 1 \\ \\ 2x & = & \pi + 2k\pi, \quad k \in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$$

de unde deducem $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Prin urmare, funcţia $\cos z$ are zerourile $z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Analog se determină şi zerourile celorlalte funcţii. ■

Observaţia 5.7.3 *Folosind* (5.65), *se pot demonstra uşor relaţiile:*

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

Din acestea, folosind relaţiile (5.67), *rezultă*

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_2 \cosh z_1$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$$

$$\sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z.$$

Părţile reale şi părţile imaginare ale funcţiilor circulare şi hiperbolice se pot obţine acum cu uşurinţă. De exemplu,

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \cosh y + i \sinh y \cos x.$$

Definiţia 5.7.3 *Funcţiile circulare* $\mathrm{tg}\, z$, $\cot z$ *şi funcţiile hiperbolice* $\tanh z$, $\coth z$ *se definesc prin:*

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}; \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}; \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

Vom trece la studiul unor funcţii uzuale obţinute prin inversarea unor funcţii olomorfe.

5.7.5 Funcţia logaritmică

Dacă în transformarea

$$w = e^z, \tag{5.68}$$

definită de funcţia exponenţială, intervertim rolul variabilelor, obţinem transformarea

$$z = e^w = e^{f(z)}, \tag{5.69}$$

care defineşte o nouă funcţie $w = f(z)$, numită *inversa funcţiei exponenţiale.*

Să folosim scrierea exponenţială a unui număr complex (5.25) şi să notăm

$$z = r\,e^{i\theta}; \quad w = u + iv, \tag{5.70}$$

unde r şi $\theta \in [0,\ 2\pi)$ sunt modulul, respectiv argumentul numărului complex z.

Înlocuind (5.70) în (5.69), în care $w = u + iv$, obţinem egalitatea

$$re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}. \tag{5.71}$$

Cum funcţia exponenţială este periodică şi cum două numere complexe sunt egale dacă şi numai dacă modulele lor sunt egale iar argumentele diferă prin $2k\pi$, unde $k \in \boldsymbol{Z}$, rezultă:

$$r = e^u; \quad v = \theta + 2k\pi. \tag{5.72}$$

Prima din relaţiile (5.72) este o egalitate între două numere reale şi deci $u = \ln r$.

În acest mod, funcţia $w = f(z)$ definită în (5.69) are expresia

$$f(z) = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \tag{5.73}$$

şi se numeşte *funcţia logaritmică*, notată cu

$$w = \mathrm{Log}\, z. \tag{5.74}$$

Funcţia complexă de variabilă complexă (5.74) generalizează funcţia reală de variabilă reală $x \mapsto \ln x$ şi extinde definiţia acesteia în domeniul complex. Deoarece constanta k poate lua orice valori întregi, funcţia logaritmică (5.74) are, pentru aceeaşi valoare a variabilei z, o *infinitate de determinări.*

Funcţia logaritmică (5.74) se mai scrie

$$w = \mathrm{Log}\, z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + 2k\pi\Big). \tag{5.75}$$

Pentru funcţia arctg $\dfrac{y}{x}$ se ia determinarea cuprinsă între $-\pi$ şi $+\pi$, care verifică egalităţile:

$$\begin{cases} r\cos\theta &= x \\ r\sin\theta &= y \end{cases}$$

Se verifică uşor că funcţia (5.75) este monogenă şi se observă că ea este definită în orice punct al planului complex situat la distanţă finită, fără origine, iar în origine ia valoarea ∞.

Definiţia 5.7.4 *O funcţie complexă de variabilă complexă $f(z)$ se numeşte* **multiformă** *dacă unui punct z din domeniul de definiţie al funcţiei îi corespunde cel puţin două valori ale funcţiei $f(z)$.*

Datorită constantei k din (5.75) care poate lua orice valoare întreagă, funcţia logaritmică este *multiformă* şi are o infinitate de valori. Acest rezultat se datorează faptului că funcţia exponenţială, deşi este olomorfă în tot planul cu excepţia punctului de la infinit, nu este injectivă.

Se pune întrebarea dacă funcţia $\operatorname{Log} z$ nu se poate descompune într–o infinitate de funcţii uniforme. Acestea se obţin dând succesiv lui k diferite valori întregi.

Această descompunere este posibilă, însă funcţiile astfel obţinute, numite *determinările* sau *ramurile* funcţiei $\operatorname{Log} z$, nu sunt fără legături între ele, ci ele se *continuă* unele pe altele formând împreună o singură funcţie, funcţia multiformă $\operatorname{Log} z$.

Să presupunem că am ales o valoare fixă pentru k. Avem

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i(\theta + 2k\pi).$$

Dacă z descrie un contur închis care înconjoară o singură dată originea în sens pozitiv, plecând din punctul $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ şi revenind în acelaşi punct, funcţia pleacă de la valoarea $\ln r_0 + i(\theta_0 + 2k\pi)$ şi ajunge cu o altă valoare, după cum vom constata.

Mărimea razei vectoare $r = |z|$ variază de la valoarea r_0, însă revine la valoarea iniţială fără a se anula (conturul nu trece prin origine), ceea ce înseamnă că partea reală a funcţiei pleacă de la valoarea $\ln r_0$ şi revine tot la ea după o variaţie continuă.

Partea imaginară însă, pleacă de la valoarea $\theta_0 + 2k\pi$ şi, după ce variază continuu, ajunge la valoarea $(\theta_0 + 2\pi) + 2k\pi$, deci partea imaginară ia valoarea finală $\theta_0 + 2(k+1)\pi$.

Prin urmare, funcţia $\operatorname{Log} z$ pleacă de la valoarea

$$\operatorname{Log}_k z_0 = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2k\pi)$$

şi ajunge la valoarea

$$\mathrm{Log}_{\,k+1} z_0 = \ln r_0 + i(\theta_0 + 2(k+1)\pi)$$

care este determinarea corespunzătoare lui $k+1$.

Aşadar, când z înconjură originea, diferitele determinări ale funcţiei $\mathrm{Log}\, z$ *se permută între ele* şi de aceea nu le putem privi ca pe nişte funcţii independente (nu se pot separa) ci trebuiesc considerate ca ramuri ale unei singure funcţii multiforme.

Definiţia 5.7.5 *Se numeşte* **punct critic** *al funcţiei complexe de variabilă complexă f un punct $a \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că în orice domeniu care–l conţine, funcţia f este multiformă.*

Dacă z înconjură originea de p ori în sens pozitiv, $\mathrm{Log}\, z$ creşte cu $2p\pi i$, iar dacă z înconjură originea de p ori în sens negativ, creşterea este $-2p\pi i$.

Evident, dacă z descrie un contur închis care nu înconjură originea, funcţia $\mathrm{Log}\, z$ revine la valoarea ei iniţială.

Fiecare din determinările (ramurile) funcţiei $\mathrm{Log}\, z$ este o *funcţie uniformă* şi olomorfă în orice domeniu care nu conţine originea O. Pentru a fi siguri că un domeniu oarecare al funcţiei logaritmice nu conţine originea, în planul complex (z) se efectuează o *tăietură* printr–o semidreaptă prin origine. În planul complex în care este practicată această tăietură, oricare din funcţiile $\mathrm{Log}_k z$ este funcţie uniformă deoarece orice curbă închisă din acest plan nu poate înconjura originea.

Permutarea determinărilor funcţiei, deci caracterul ei de funcţie multiformă, se manifestă numai în domenii care conţin originea. Prin urmare, pentru funcţia $\mathrm{Log}\, z$ originea are un caracter singular şi se numeşte un *punct critic* al funcţiei.

După analiza funcţiei logaritm, se poate da o nouă definiţie funcţiei multiforme precum şi a funcţiei uniforme.

Definiţia 5.7.6 *Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este* **multiformă** *în domeniul $D \subset \mathbb{C}$ dacă în D există un contur închis pe care transformarea $w = f(z)$ îl transformă într–un arc deschis $w_0 w_0'$ din planul $uO'v$.*

Definiţia 5.7.7 *Funcţia $f : D \to \mathbb{C}$ este* **uniformă** *în domeniul D dacă $w = f(z)$ transformă orice contur închis situat în D într–un contur închis din planul $uO'v$.*

Derivata funcţiei $\text{Log}\, z$ se obţine uşor observând că, din însăşi definiţia funcţiei logaritmice, avem

$$e^{\text{Log z}} = z \tag{5.76}$$

În membrul întâi al relaţiei (5.76) avem o funcţie compusă care este monogenă în tot planul coplex la distanţă finită cu excepţia originii. Derivând şi ţinând cont de (5.76), pentru $z \neq 0$ avem,

$$e^{\text{Log z}} \cdot (\text{Log}\, z)' = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Big(\text{Log}\, z\Big)' = \frac{1}{z}. \tag{5.77}$$

Mai general, plecând de la (5.77), obţinem

$$\Big(\text{Log}\, f(z)\Big)' = \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{5.78}$$

Se observă că atât (5.77) cât şi (5.78) sunt extinderi în complex ale unor rezultate din real.

5.7.6 Funcţia radical

Fie funcţia

$$w = \sqrt{z} = \sqrt{r}\Big(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\sin\frac{\theta}{2}\Big) = \sqrt{r}\, e^{\frac{i\theta}{2}}$$

şi să presupunem că z descrie o dată, în sens pozitiv, cercul cu centrul în O şi rază r_0 plecând din punctul $z_0 = r_0\, e^{i\theta_0}$. Atunci w pleacă de la valoarea $w_0 = \sqrt{r}_0 e^{(i\theta_0)/2}$ şi, în timp ce θ creşte de la valoarea θ_0 la valoarea $\theta_0 + 2\pi$, $\dfrac{\theta}{2}$ creşte de la valoarea $\dfrac{\theta_0}{2}$ la valoarea $\dfrac{\theta_0}{2} + \pi$, iar w variază continuu de la w_0 la $w'_0 = \sqrt{r_0}\, e^{i\frac{\theta_0}{2} + i\pi} = -w_0$. Dacă z descrie iarăşi acelaşi cerc, w revine la valoarea iniţială w_0 după o variaţie continuă.

Prin urmare, *funcţia radical* are două determinări (ramuri) $\sqrt{z}$ şi $-\sqrt{z}$, sau

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{(i\theta)/2}, \quad f_2(z) = -\sqrt{r}\, e^{(i\theta)/2},$$

care se permută între ele atunci când z înconjură originea. Se vede că originea este singurul *punct critic* al funcţiei situat la distanţă finită sau *punct de ramificaţie* pentru funcţia $f(z) = \sqrt{z}$.

Dacă în planul complex efectuăm o *tăietură* de–a lungul unei semidrepte care pleacă din origine, punctul z nu mai poate descrie curbe închise care să înconjure originea.

Observaţia 5.7.4 *În planul complex la distanţă finită în care am făcut tăietura descrisă, funcţiile $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ sunt uniforme.*

În concluzie, funcţiile $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ sunt uniforme în orice disc deschis care nu conţine originea.

5.7.7 Funcţii trigonometrice inverse

Dacă în definiţia funcţiei $w = \cos z$ intervertim rolurile variabilelor z şi w, obţinem funcţia inversă

$$w = \arccos z \tag{5.79}$$

dată de

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}. \tag{5.80}$$

Ultima ecuaţie se poate scrie şi în forma

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \tag{5.81}$$

de unde $e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ şi deci

$$w = \arccos z = \frac{1}{i}\,\mathrm{Log}\,(z \pm \sqrt{z^2 - 1}). \tag{5.82}$$

În mod analog se defineşte funcţia trigonometrică inversă $w = \arcsin z$ punând $z = \sin w$. Se găseşte

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0, \tag{5.83}$$

care are rădăcinile $e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ ce la rândul lor conduc la expresia funcţiei trigonometrice inverse

$$\arccos z = \frac{1}{i}\,\mathrm{Log}\,(iz \pm \sqrt{1 - z^2}). \tag{5.84}$$

Se vede că atât $\arccos z$ cât şi $\arcsin z$ sunt funcţii multiforme de z, căci atunci când z înconjură o dată punctul $z = -1$ sau $z = 1$, radicalul schimbă semnul, iar când punctul $z + \sqrt{z^2 - 1}$ înconjură odată originea, funcţia creşte cu 2π. Prin urmare, pentru aceste două funcţii inverse, punctele $z = -1$ şi $z = 1$ sunt puncte singulare pe care le numim şi aici *puncte critice.*

Funcţia $w = \mathrm{arctg}\, z$ se defineşte punând

$$z = \mathrm{tg}\, w = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \quad \Longrightarrow \quad e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

de unde rezultă că expresia funcţiei trigonometrice inverse (inversa funcţiei tg) este

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Log}\,\frac{1+iz}{1-iz}.$$

Această funcţie este, de asemenea, multiformă, având punctele critice $z = \pm\, i$.

Analog se introduce funcţia inversă a funcţiei trigonometrice cotangenta lui z.

De remarcat că toate aceste funcţii trigonometrice inverse se exprimă cu ajutorul funcţiei logaritmice aplicată unor expresii algebrice, ceea ce nu apare în studiul acestor funcţii în real.

Datorită prezenţei funcţiei logaritmice în expresiile acestor funcţii trigonometrice inverse, rezultă că fiecare din ele are o infinitate de determinări.

5.7.8 Funcţii algebrice

O ecuaţie algebrică de forma

$$A_0(z)w^n + A_1(z)w^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(z)w + A_n(z) = 0$$

defineşte pe w ca funcţie de z. Dacă funcţiile $A_k(z)$ sunt uniforme într–un domeniu D, se vede că w va fi o funcţie multiformă de z, având n determinări pentru pentru fiecare $z \in D$. Dacă toţi coeficienţii $A_k(z)$ sunt polinoame în z, funcţia w este definită în tot planul (z) şi se poate arăta că are un număr finit de puncte critice în acest plan. O astfel de funcţie se numeşte *funcţie algebrică*, deşi în general nu se poate exprima cu ajutorul radicalilor şi al operaţiilor raţionale efectuate asupra lui z.

Există însă şi funcţii multiforme de variabilă z care au o infinitate de determinări, cum am văzut în cazul funcţiilor $\mathrm{Log}\, z$, $\operatorname{arctg} z$, etc. Acestea nu sunt funcţii algebrice şi de aceea se numesc *funcţii multiforme transcendente*.

5.8 Exerciţii rezolvate

Exerciţiul 5.8.1 *Să se determine punctele singulare la distanţă finită ale funcţiilor de mai jos cercetând pentru fiecare din ele şi comportarea în punctul de la infinit:*

$$1.\ f(z) = 2 + z - z^2;\quad 2.\ f(z) = \frac{z-i}{z(z+1)};\quad 3.\ f(z) = \frac{2z^4+5z+1}{(z^2-6z+8)^2};$$

$$4.\ f(z) = \frac{z^3}{1-z^3};\quad 5.\ f(z) = \frac{z^8+1}{(z^2+4)^3};\quad 6.\ f(z) = \frac{z^7-3z^2}{z^2-6z+9}.$$

Soluţie. Cu excepţia primei funcţii care este un polonom de gradul 2, celelalte sunt funcţii raţionale.

1. Funcţia $f(z)$ este un polinom, deci este funcţie olomorfă în tot planul complex la distanţă finită. Punctul de la infinit este pol de ordinul al doilea pentru această funcţie.

2. Funcţia de la acest punct fiind funcţie raţională, rădăcinile numitorului sunt puncte singulare de tip pol. Prin urmare, $z_1 = 0$ şi $z_2 = -1$ sunt poli de ordinul unu. Deoarece gradul numărătorului este mai mic decât gradul numitorului, punctul de la infinit este punct ordinar. Prin urmare, funcţia dată este olomorfă în orice domeniu, mărginit sau nemărginit, care nu conţine punctele $z_1 = 0$ şi $z_2 = -1$.

3. Punctele $z_1 = 2$ şi $z_2 = 4$ sunt poli de ordinul al doilea, iar $z = \infty$ este punct ordinar. Domeniul maxim în care funcţia $f(z)$ este olomorfă este planul complex din care s–au scos punctele $z_1 = 2$ şi $z_2 = 4$.

4. Punctele $z_1 = 1$ şi $z_2 = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sunt poli de ordinul unu, iar $z = \infty$ este punct ordinar. Prin urmare, funcţia $f(z)$ este olomorfă în orice domeniu, mărginit sau nemărginit, care nu conţine punctele z_1 şi z_2.

5. La distanţă finită, funcţia $f(z)$ are ca singularităţi pe $z_1 = 2i$ şi $z_2 = -2i$ care sunt puncte singulare de tip pol, fiecare din ele fiind pol de ordinul trei. Punctul $z_3 = \infty$ este pol de ordinul doi. Prin urmare, funcţia $f(z)$ este olomorfă în orice domeniu mărginit care nu conţine punctele $z_1 = 2i$ şi $z_2 = -2i$.

6. Punctul $z_1 = 3$ este pol de ordin doi, iar $z_2 = \infty$ este pol de ordin cinci. Funcţia $f(z)$ este olomorfă în orice domeniu mărginit care nu conţine punctul z_1. ■

Exerciţiul 5.8.2 *Să se afle singularităţile funcţiilor de mai jos, precizându–se natura punctului de la infinit:*

$$1.\ \ f(z) = \sqrt{z^2+9};\quad 2.\ \ f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z-1};\qquad 3.\ \ f(z) = \ln\frac{z}{(z-i)^2};$$

$$4.\ \ f(z) = \ln\frac{1+z}{1-z};\quad 5.\ \ f(z) = e^{-\dfrac{z}{z-1}};\quad 6.\ \ f(z) = e^{\dfrac{1}{\sin \pi z}}.$$

Soluţie. Primele două funcţii sunt legate de funcţia radical, următoarele două sunt compuneri ale funcţiei logaritmice cu funcţii raţionale, iar ultimele sunt compuneri ale funcţiei exponenţiale cu o funcţie raţională şi respectiv cu o funcţie circulară.

1. $z_1 = -3i$ şi $z_2 = +3i$ sunt puncte critice algebrice, iar $z = \infty$ este pol de ordinul unu. Funcţia $f(z)$ este multiformă, are două ramuri şi fiecare din ele devine uniformă dacă în planul complex se face o tăietură care să unească cele două puncte singulare la distanţă finită. Tăietura cea mai indicată este segmentul de dreaptă de pe axa imaginară cu extremităţile în z_1 şi z_2. Fiecare din ramuri este funcţie olomorfă în orice domeniu mărginit al planului în care s–a efectuat tăietura.

2. Punctul $z_1 = 1$ este pol de ordinul unu, iar punctele $z_2 = 0$ şi $z_3 = \infty$ sunt puncte critice algebrice.

3. Punctele $z_1 = 0$, $z_2 = i$ şi $z_3 = \infty$ sunt puncte critice logaritmice. Funcţia $f(z)$ are o infinitate de determinări (ramuri), fiecare din ele fiind o funcţie olomorfă în orice domeniu mărginit inclus în planul complex din care se exclude tăietura care poate fi reprezentată de segmentul de dreaptă ce uneşte punctele z_1 şi z_2.

4. Punctele $z_1 = -1$ şi $z_2 = 1$ sunt puncte critice logaritmice, iar punctul de la infinit este punct ordinar. Funcţia $f(z)$ are o infinitate de determinări (ramuri), fiecare din ele fiind o funcţie olomorfă în orice domeniu mărginit sau nemărginit inclus în planul complex din care se exclude segmentul de dreaptă ce uneşte punctele z_1 şi z_2.

5. Punctele $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ sunt puncte singulare esenţiale izolate, iar $z = \infty$ este punct ordinar.

6. $z = k$, unde $k \in \boldsymbol{Z}$, sunt puncte singulare esenţiale izolate, iar $z = \infty$ este punct singular esenţial neizolat deoarece este limita unui şir de puncte singulare esenţiale.

Exerciţiul 5.8.3 *Să se studieze funcţiile multiforme:*

1. $f_1(z) = \sqrt{z^3 + 1}$; **2**. $f_2(z) = \sqrt[3]{z^3 + 1}$;

3. $f_3(z) = Log\,\dfrac{z - i}{z + i}$; **4**. $f_4(z) = \sqrt{z^2 + 1}\, Log\,(z^2 + 1)$.

Soluţie. **1**. Notăm

$$z+1=r_1\,e^{i\theta_1},\quad z-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=r_2\,e^{i\theta_2},\quad z-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=r_3e^{i\theta_3}.$$

Atunci funcţia $f_1(z)$ se scrie

$$f_1(z)=\sqrt{r_1r_2r_3}\,e^{k\pi i+i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/2}.$$

Ţinând seama de reprezentarea geometrică a adunării şi scăderii numerelor complexe, rezultă că r_1 este lungimea segmentului care uneşte punctul -1 cu z, iar θ_1 este unghiul dintre axa reală şi acest segment, măsurat în sens direct trigonometric. Interpretări analoage avem pentru r_2, θ_2 şi r_3, θ_3.

Cele două ramuri ale funcţiei $f_1(z)$ sunt:

$$f_{11}(z)=\sqrt{r_1r_2r_3}e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/2};\quad f_{12}(z)=\sqrt{r_1r_2r_3}e^{i\pi+i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/2}.$$

Observăm că $f_{12}(z)=-f_{11}(z)$.

Dacă punctul z descrie un arc de curbă zMz', plecând din punctul z şi fără a înconjura nici unul din punctele

$$z_1=-1,\quad z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2},\quad z_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},$$

funcţia f_1 revine la aceeaşi valoare, ceea ce înseamnă că $f_1(z')=f_1(z)$, unde expresia lui $f_1(z)$ poate fi una din cele scrise mai sus.

Dacă z descrie arcul de curbă zNz', înconjurând unul din punctele z_1, z_2, z_3 sau toate trei şi dacă funcţia f_1 pleacă de la valoarea $f_{11}(z)$, ea va ajunge la valoarea

$$f_1(z')=\sqrt{r_1r_2r_3}\,e^{i(k\pi+(\theta_1+\theta_2+\theta_3)/2)}=-f_{11}(z)$$

deoarece $k=1$ dacă este înconjurat un punct şi $k=3$ dacă sunt înconjurate toate punctele.

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte z cu z' înconjurând două din cele trei puncte, funcţia f_1 revine cu aceeaşi valoare.

Deci, când punctul z descrie o curbă care înconjoară un număr impar din cele trei puncte, funcţia f_1 trece de la o determinare la alta, iar când curba înconjoară un număr par de puncte valoarea funcţiei nu se schimbă.

Punctele z_1, z_2, z_3 sunt punctele critice ale funcţiei f_1.

Dacă facem anumite *tăieturi* în planul complex (z), ramurile funcţiei f_1 devin funcţii uniforme pentru că nu mai există posibilitatea înconjurării unui punct sau mai multe din cele trei.

Tăieturile se pot efectua în patru moduri. Trei din aceste moduri constau dintr–un segment ce uneşte două din cele trei puncte la care se adaugă câte o semidreaptă cu extremitatea în cel de al treilea punct, semidreaptă ce nu trebuie să intersecteze segmentul care uneşte celelalte două puncte. Cel de al patrulea sistem de tăieturi constă din trei semidrepte disjuncte care au extremităţi câte unul din cele trei puncte.
2. Cu notaţiile făcute, valorile funcţiei f_2 se scriu

$$f_2(z) = \sqrt[3]{r_1 r_2 r_3}\, e^{\frac{2k\pi i}{3} + \frac{i}{3}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)}$$

Procedând similar, găsim că funcţia f_2 are trei determinări (cele obţinute dând lui k valorile $0, 1$ şi 2) şi că prin efectuarea tăieturilor fiecare din ramuri devine uniformă şi olomorfă în orice domeniu care nu intersectează tăieturile.
3. Cu notaţia $z - i = r_1\, e^{i\theta_1}$, $z + i = r_2\, e^{i\theta_2}$, funcţia f_3 se scrie

$$f_3(z) = \ln\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2 + 2k\pi), \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Dacă z descrie un arc de curbă care uneşte pe z cu z' înconjurând punctul $z = i$, funcţia devine

$$f_3(z') = \ln\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 + 2\pi - \theta_2 + 2k\pi) = 2\pi i + f_3(z).$$

Dacă arcul descris înconjoară pe $z = -i$, avem $f_3(z') = f_3(z) - 2\pi i$. Când arcul descris înconjură ambele puncte $z = -i$ şi $z = i$, funcţia revine cu aceeaşi valoare. Făcând o tăietură (de exemplu, segmentul care uneşte cele două puncte), ramurile funcţiei devin uniforme. Aceste ramuri sunt uniforme în orice domeniu simplu conex care nu conţine nici unul din punctele critice ale funcţiei f_3.
4. Cu aceleaşi notaţii ca la funcţia precedentă, funcţia $f_4(z)$ se scrie

$$f_4(z) = \sqrt{r_1 r_2}\, e^{k\pi i + i(\theta_1+\theta_2)/2}\Big(\ln r_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2 + 2k_1\pi)\Big), \quad k, k_1 \in \boldsymbol{Z}$$

şi se studiază ca mai sus. ∎

Capitolul 6

Integrala curbilinie. Teoremele lui Cauchy

6.1 Integrala curbilinie în planul complex şi proprietăţile ei fundamentale

Fie C o curbă netedă pe porţiuni de lungime L situată în planul complex (z) de ecuaţii parametrice

$$C: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta], \quad \alpha, \beta \in \overline{I\!R} = [-\infty, +\infty],$$

unde funcţiile φ şi ψ sunt derivabile pe porţiuni, derivatele φ', ψ' sunt continue şi satisfac condiţia $\Big(\varphi'(t)\Big)^2 + \Big(\psi'(t)\Big)^2 > 0$. Specificarea coordonatelor x şi y ale punctelor curbei C este echivalentă cu specificarea funcţiei complexe de variabilă reală

$$\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}, \quad \zeta(t) = \varphi(t) + i\,\psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

sau cu specificarea ecuaţiei curbei C cu ajutorul variabilei complexe $z = x + iy$,

$$C: \quad z = \zeta(t), \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Presupunem că în fiecare punct al curbei C este dată funcţia complexă

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y).$$

Conceptul de *integrală a funcţiei* $f(z)$ *pe curba* C se introduce asemănător cu integrala curbilinie din real.

Astfel, se consideră o *partiţie* a curbei C în n arce prin punctele de diviziune ζ_0, $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, care corespund valorilor crescătoare ale parametrului t, notate respectiv $t_0 = \alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = \beta$, unde $t_k < t_{k+1}$. Notăm $\Delta\zeta_k = \zeta_k - \zeta_{k-1}$ şi formăm *suma integrală*

$$\Sigma(\zeta_k, \zeta_k^*) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k^*)\,\Delta\zeta_k, \tag{6.1}$$

unde ζ_k^* este un punct arbitrar de pe arcul curbei C de extremităţi ζ_{k-1} şi ζ_k.

Definiţia 6.1.1 *Dacă există limita sumei integrale* (6.1) *pentru*

$$\max\{|\Delta\zeta_k|, 1 \le k \le n\} \to 0$$

şi aceasta este independentă de partiţia curbei C şi de alegerea punctelor intermediare ζ_k^*, atunci se spune că funcţia complexă de variabilă complexă $f(z)$ este **integrabilă** *pe curba C, iar limita se numeşte* **integrala funcţiei $f(z)$ pe curba** *C şi se notează*

$$\int_C f(z)dz. \tag{6.2}$$

Problema existenţei integralei (6.2) se reduce la problema existenţei unor integrale curbilinii reale de tipul al doilea ale părţii reale u şi părţii imaginare v a funcţiei $f(z)$. Într-adevăr, scriind

$$f(\zeta_k^*) = u(P_k^*) + i\,v(P_k^*), \quad \Delta\zeta_k = \Delta\xi_k + i\Delta\eta_k,$$

unde $P_k^*(\xi_k^*, \eta_k^*) \in C$ este imaginea numărului complex $\zeta_k^* = \xi_k^* + i\,\eta_k^*$, putem reprezenta expresia (6.1) ca

$$\Sigma(\zeta_k, \zeta_k^*) = \sum_{k=1}^{n} \Big(u(P_k^*)\Delta\xi_k - v(P_k^*)\Delta\eta_k\Big) + i\sum_{i=1}^{n} \Big(v(P_k^*)\Delta\xi_k + u(P_k^*)\Delta\eta_k\Big).$$

Partea reală şi partea imaginară a sumei $\Sigma(\zeta_k, \zeta_k^*)$ sunt sumele integrale ale respectiv integralelor curbilinii de al doilea tip

$$\int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy; \quad \int_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy, \tag{6.3}$$

cu presupunerea că, pentru existenţa integralelor (6.3), şi deci a integralei (6.2), este suficient ca funcţiile reale u şi v să fie continue pe porţiuni.

Astfel, integrala (6.2) ia forma

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy, \quad (6.4)$$

Această relaţie poate să servească ca definiţie a integralei curbilinii a funcţiei $f(z)$ pe curba C.

Enumerăm câteva proprietăţi care sunt consecinţe evidente ale proprietăţilor integralelor curbilinii de speţa a doua:

$$\int_{AB} f(z)dz = -\int_{BA} f(z)dz; \quad (6.5)$$

$$\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1\cup C_2} f(z)dz; \quad (6.6)$$

$$\int_C (a\,f(z) + b\,g(z))dz = a\int_C f(z)dz + b\int_C g(z)dz, \quad (6.7)$$

unde $C_1 \cup C_2$ este juxtapunerea curbelor C_1 şi C_2 (se presupune prin urmare că extremitatea curbei C_1 coincide cu originea curbei C_2), a şi b sunt constante complexe oarecare, iar f şi g sunt funcţii complexe pentru care există integralele pe curba C;

$$\Big|\int_C f(z)dz\Big| \le \int_C |f(z)|\,ds, \quad (6.8)$$

unde ds este elementul de arc al curbei C, integrala din membrul drept fiind o integrală curbilinie reală de speţa întâi;

$$\Big|\int_C f(z)dz\Big| \le M\cdot L, \quad (6.9)$$

cu $M = \max_{z\in C}|f(z)|$;

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(\varphi(\zeta))\,\varphi'(\zeta)\,d\zeta, \quad (6.10)$$

unde $z = \varphi(\zeta)$ este o funcţie olomorfă care stabileşte o corespondenţă biunivocă între curbele C şi Γ;

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(\zeta(t))\,\zeta'(t)\,dt, \quad (6.11)$$

$z = \zeta(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ fiind o reprezentare parametrică a curbei C cu extremităţile $\zeta(\alpha)$ şi $\zeta(\beta)$.

Egalitaea (6.11) este un caz particular al celei din (6.10) şi constitue formula de calcul a integralei curbilinii în complex.

Integrala din membrul al doilea din (6.11) este o integrală definită a unei funcţii complexe de variabilă reală care se scrie

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta(t))\,\zeta'(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta}\Big(u(\varphi(t),\psi(t)) + i\psi(\varphi(t),\psi(t))\Big)\Big(\varphi'(t)+i\psi'(t)\Big)dt$$

sau

$$\begin{aligned} f(\zeta(t))\,\zeta'(t)\,dt &= \int_{\alpha}^{\beta}\Big(u(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) - v(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big)dt + \\ &+ i\int_{\alpha}^{\beta}\Big(u(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) + v(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\Big)dt. \end{aligned}$$

Exerciţiul 6.1.1 *Să se calculeze integrala curbilinie în complex*

$$I_n = \int_{\Gamma}(z-z_0)^n dz, \tag{6.12}$$

unde $n \in \boldsymbol{Z}$, *pe un cerc* Γ *cu centrul în punctul* $z_0 \in \mathbb{C}$ *şi rază* r.

Soluţie. Considerăm parametrizarea cercului

$$t \to \zeta(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

unde r este raza cercului.

Înlocuind z cu $\zeta(t)$ şi dz cu $\zeta'(t)dt = rie^{it}dt$, conform formulei (6.11), deducem

$$I_n = \int_0^{2\pi} ir^{n+1}e^{i(n+1)t}dt = ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt.$$

Pentru $n=-1$, integrala I_{-1} are valoarea $I_{-1} = 2\pi i$, iar pentru $n \neq -1$ avem

$$I_n = \frac{r^{n+1}}{n+1}(e^{2\pi i(n+1)} - 1) = 0.$$

Am obţinut următorul rezultat, care ulterior ne va fi util

$$\int_{\Gamma}(z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad n \in \boldsymbol{Z}\setminus\{-1\} \\ 2\pi i, \text{pentru} & n = -1. \end{cases}$$

Observăm că rezultatul obţinut nu depinde de raza r a cercului şi nici de centrul său z_0.. ■

Exerciţiul 6.1.2 *Să se calculeze integrala curbilinie* $\displaystyle\int_\Gamma z^n dz$, $n \in I\!N$, *pe frontiera semi–discului* $D = \{z = x + iy|\ x^2 + y^2 < a^2,\ y > 0\}$.

Soluţie. Fie porţiunile de curbe

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{z = x + iy|\ x \in [-a, a],\ y = 0\},\\ \Gamma_2 &= \{z = x + iy|\ x^2 + y^2 = a^2,\ y \geq 0\}\end{aligned}$$

ale căror ecuaţii parametrice sunt:

$$\Gamma_1: \ t \mapsto \gamma_1(t) = t, \quad t \in [-a, a]; \quad \Gamma_2: \ t \mapsto \gamma_2(t) = a\, e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$

Deoarece $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, integrala se scrie ca o sumă de două integrale şi fiecăreia i se aplică formula de calcul (6.11). Avem:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma z^n dz &= \int_{\Gamma_1} z^n dz + \int_{\Gamma_2} z^n dz = \int_{-a}^{a} t^n\, dt + \int_0^\pi a^n e^{int} \cdot a\, ie^{it}\, dt =\\ &= \frac{a^{n+1}}{n+1}(1 - (-1)^{n+1}) + a^{n+1} i \int_0^\pi e^{i(n+1)t}\, dt = 0,\end{aligned}$$

deoarece

$$\int_0^\pi e^{i(n+1)t}\, dt = \frac{1}{i(n+1)}(e^{i(n+1)\pi} - 1) = \frac{1}{i(n+1)}((-1)^{n+1} - 1).$$

Vom demonstra mai jos (vezi relaţia (6.15)) că integrala pe orice contur dintr–o funcţie olomorfă este nulă şi prin urmare rezultatul găsit este justificat dacă avem în vedere că funcţia polinom este olomorfă în orice domeniu mărginit. ∎

Observaţia 6.1.1 *Formula* (6.4) *şi relaţia* (6.11) *permit extinderea conceptului de integrală improprie a unei funcţii reale de o variabilă reală la cazul unei funcţii complexe de o variabilă complexă, care este o integrală curbilinie dintr–o funcţie complexă pe o curbă de lungime infinită.*

Definiţia 6.1.2 *O integrală improprie de primul tip pe o curbă infinită C se zice că este* **convergentă** *dacă există limita şirului de integrale complexe*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f(z)dz, \tag{6.13}$$

unde (C_n) este un şir de curbe cu proprietăţile:

- *C_n este o parte de lungime finită a curbei C;*
- $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$

şi această limită nu depinde de alegerea şirului (C_n).

Dacă există limita (6.13) *numai pentru o anumită alegere a şirului de curbe* (C_n), *integrala improprie* $\displaystyle\int_C f(z)dz$ *se numeşte* **convergentă în sensul valorii principale**.

În cele ce urmează vom considera integrale din funcţii complexe olomorfe într–un anumit domeniu a cărui frontieră să fie o curbă închisă netedă pe porţiuni care nu are puncte multiple (curba nu se intersectează pe ea însăşi). O astfel de curbă va fi numită *contur* şi are ecuaţia $z = \zeta(t)$, $t \in [\alpha, \beta] \subset I\!R$, unde funcţia $\zeta(t)$ satisface condiţia $\zeta(t_1) \neq \zeta(t_2)$ pentru $t_1 \neq t_2$, cu excepţia lui $t_1 = \alpha$ şi $t_2 = \beta$. Integrala (6.2) de–a lungul unei astfel de curbe se va numi *integrală pe contur*.

6.2 Teoremele lui Cauchy

Deoarece valoarea unei integrale pe contur depinde de sensul de parcurgere al curbei, convenim să luăm drept *sens pozitiv* acel sens de parcurgere care *lasă la stânga* domeniul limitat de curbă. Sensul contrar acestuia se numeşte *sens negativ* de parcurgere al conturului. Integrarea pe un contur C parcurs în sens pozitiv din funcţia complexă de variabilă complexă $f(z)$ se va nota $\displaystyle\int_{C^+} f(z)dz$; dacă conturul este parcurs în sens negativ, integrala corespunzătoare se va nota prin $\displaystyle\int_{C^-} f(z)dz$. Când nu se menţionează sensul de parcurs iar curba pe care se face integrarea este un contur, deci când vom întâlni scrierea $\displaystyle\int_C f(z)dz$, se va subînţelege că sensul de parcurs al curbei C este cel pozitiv.

Proprietăţile integralei pe contur din funcţii continue pe *domeniul închis* limitat de acel contur şi olomorfe în domeniul mărginit de conturul respectiv sunt determinate în mare măsură de proprietăţile obişnuite ale integralelor curbilinii reale de al doilea tip. Una din aceste proprietăţi stabileşte legătura între integrala curbilinie de speţa a doua pe un contur parcurs în sens pozitiv şi o anumită integrală dublă pe domeniul mărginit de contur.

Teorema 6.2.1 *Dacă funcţiile P şi Q sunt continue pe domeniul închis $D \cup C$ mărginit de conturul neted pe porţiuni C şi derivatele lor parţiale de*

primul ordin sunt continue pe domeniul D, atunci are loc relaţia

$$\int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\Big)dxdy, \tag{6.14}$$

numită **formula integrală Riemann–Green**.

Să demonstrăm un rezultat fundamental al teoriei funcţiilor complexe.

Teorema 6.2.2 (**Teorema lui Cauchy pentru un domeniu simplu conexe**) *Dacă funcţia complexă de variabilă complexă $f : D \to \mathbb{C}$ este olomorfă pe domeniul simplu conex D din planul complex (z), atunci*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0, \tag{6.15}$$

oricare ar fi conturul $\Gamma \subset D$.

Demonstraţie. Deoarece funcţia $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ este olomorfă pe D, funcţiile u şi v admit derivate parţiale de ordinul întâi continue în D care satisfac în D condiţiile Cauchy–Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y); \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases} \tag{6.16}$$

Să notăm cu $D_1 \subset D$ domeniul simplu conex limitat de un contur oarecare $\Gamma \subset D$ şi să aplicăm formula (6.14) integralelor curbilinii reale de al doilea tip din membrul doi al relaţiei (6.4) folosind totodată (6.16). Avem:

$$\int_\Gamma u\,dx - v\,dy = \iint\limits_{D_1} \Big(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)dxdy = 0; \tag{6.17}$$

$$\int_\Gamma v\,dx + u\,dy = \iint\limits_{D_1} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)dxdy = 0. \tag{6.18}$$

Relaţiile (6.4), (6.17) şi (6.18) demonstrează teorema. ■

Teorema 6.2.2 stabileşte că integrala unei funcţii complexe pe orice contur situat în domeniul D de olomorfie al funcţiei este zero.

Dacă se impune condiţia suplimentară ca funcţia f să fie definită şi continuă pe frontiera C a domeniului D, ea însăşi un contur (D este o mulţime deschisă, simplu conexă), Teorema 6.2.2 are loc şi pentru $C = \partial D$.

Ultima afirmaţia este un enunţ uşor modificat al Teoremei 6.2.2. Datorită importanţei sale în aplicaţiile practice, vom formula această afirmaţie într–o teoremă separată.

Teorema 6.2.3 (**A doua formulare a teoremei lui Cauchy pentru domenii simplu conexe**) *Dacă $f(z)$ este o funcţie olomorfă într–un domeniu simplu conex D mărginit de conturul C şi este continuă pe domeniul închis $D \cup C$, atunci integrala funcţiei $f(z)$ de–a lungul frontierei C a domeniului D este zero:*

$$\int_C f(z)dz = 0. \tag{6.19}$$

Teorema de mai sus a fost formulată pentru un domeniu simplu conex, însă ea poate fi generalizată la cazul unui domeniu multiplu conex. În acest caz, frontiera totală a domeniului este formată din mai multe contururi: *conturul exterior* C_0 şi *contururile interioare* C_1, $C_2, \ldots, C_n$. Oricare două contururi sunt disjuncte. *Sensul pozitiv de parcurgere a frontierei totale a unui domeniu multiplu conex* va fi acela pentru care *domeniul este lăsat la stânga*. Astfel, C_0 este traversat în sens pozitiv, iar contururile interioare sunt parcurse în sens negativ (sensul acelor de ceasornic).

Teorema 6.2.4 (**Teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe**) *Dacă $f(z)$ este funcţie olomorfă pe domeniul multiplu conex D mărginit pe exterior de conturul C_0 şi pe interior de contururile $C_1, C_2, \ldots, C_n$ şi f este funcţie continuă pe domeniul închis $D \cup C$, unde $C = \partial D = C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$ este frontiera totală a domeniului D parcursă în sens pozitiv, atunci $\int_C f(z)dz = 0$, relaţie echivalentă cu una din formele:*

$$\int_{C_0^+} f(z)dz + \int_{C_1^-} f(z)dz + \int_{C_2^-} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n^-} f(z)dz = 0; \tag{6.20}$$

$$\int_{C_0^+} f(z)dz = \int_{C_1^+} f(z)dz + \int_{C_2^+} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n^+} f(z)dz. \tag{6.21}$$

Demonstraţie. Fie curbele netede $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$[1] care leagă conturul exterior C_0 cu fiecare din contururile interioare C_1, C_2, $\ldots$, C_n. Curbele $C_0, C_1, \ldots, C_n$ şi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, ultimele parcurse în ambele sensuri, limitează un domeniu simplu conex. În baza Teoremei 6.2.3, integrala de–a lungul frontierei acestui domeniu este zero. Cum integralele de–a lungul

[1]Curbele $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ se aleg astfel încât să nu să se intersecteze şi pot fi în particular segmente de dreaptă

curbelor auxiliare $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ apar de două ori, dar în sensuri opuse, ele se anulează şi deci obţinem (6.20).

Relaţia (6.21) se deduce uşor din precedenta. ■

Exemplul 6.2.1 *Aplicând teorema lui Cauchy funcţiei $f(z) = e^{-z^2}$ pe conturul unui dreptunghi de laturi $2R$ şi $\frac{k}{a}$, situat în semiplanul superior, simetric în raport cu axa imaginară şi cu una din laturile de lungime $2R$ situată pe axa reală, să se arate că*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+i\frac{k}{a})^2} dx. \tag{6.22}$$

Să se calculeze apoi valoarea integralei improprii

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \frac{2k}{a} x\, dx.$$

Soluţie. Funcţia $f(z) = e^{-z^2}$ este olomorfă în întreg planul, prin urmare integrala sa pe orice contur este nulă.

Considerând conturul din enunţ şi trecând la limită pentru $R \to \infty$, obţinem

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx + \lim_{R\to\infty} \int_{II} e^{-z^2} dz +$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-(x+i\frac{k}{a})^2} dx + \lim_{R\to\infty} \int_{IV} e^{-z^2} dz = 0,$$

unde II şi IV reprezintă laturile dreptunghiului paralele cu axa imaginară situate de o parte şi de alta a ei la distanţa R.

A doua şi a patra integrală este egală cu zero pentru că modulul integrantului tinde la zero când $R \to \infty$ şi din egalitatea de mai sus rezultă (6.22).

Dar egalitatea (6.22) se poate scrie în forma

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = e^{\frac{k^2}{a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-2i\frac{k}{a}x} dx. \tag{6.23}$$

Dacă ţinem seama de faptul că $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ şi că $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, din (6.23) deducem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos \frac{2k}{a} x\, dx = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{k^2}{a^2}}. \tag{6.24}$$

Această integrală va fi folosită în unul din capitolele următoare. ■

Exercițiul 6.2.1 *Să se calculeze integrala*

$$I = \int_\Gamma \frac{z}{z^2-1}dz,$$

unde Γ *este cercul cu centrul în origine şi raza* $a \neq 1$, *parcurs în sens pozitiv.*

Soluţie. Funcţia $f(z) = \dfrac{z}{z^2-1}$ este olomorfă pe domeniul triplu conex $D \setminus \{-1, 1\}$.

Dacă $a < 1$, funcţia $f(z)$ este olomorfă pe domeniul simplu conex Δ a cărui frontieră este cercul Γ. Conform primei teoreme a lui Cauchy, $I = 0$.

Dacă $a > 1$, domeniul închis $\Delta \cup \Gamma$ nu mai este un domeniu de olomorfie pentru funcţia f. În această situaţie, considerăm cercurile Γ_1 şi Γ_2, incluse în Δ, de raze $r_1 < 1$ şi $r_2 < 1$. Notăm cu Δ_1 şi Δ_2 discurile mărginite de Γ_1 şi Γ_2 şi fie $\overline{\Delta}_1$ şi $\overline{\Delta}_2$ închiderile acestor discuri.

Domeniul $\Delta \setminus \{\overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2\}$ şi frontiera sa sunt incluse în D, deci putem aplica Teorema 6.2.4 şi folosi relaţia (6.21) a acesteia. Obţinem

$$I = \int_\Gamma \frac{z}{z^2-1}dz = \int_{\Gamma_1} \frac{z}{z^2-1}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{z}{z^2-1}dz,$$

unde contururile Γ_1 şi Γ_2 sunt parcurse în sens pozitiv.

Cum $\dfrac{z}{z^2-1} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z+1}\Big)$, avem

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \frac{z}{z^2-1}dz = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z-1}dz + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} \frac{1}{z+1}dz.$$

În conformitate cu (6.12) prima integrală din exprimarea lui I_1 este egală cu $2\pi i$. A doua este nulă deoarece $\overline{\Delta}_1$ este inclus în domeniul de olomorfie al funcţiei $z \mapsto f_1(z) = \dfrac{1}{z+1}$, deci $I_1 = \pi i$.

Analog se dovedeşte că $I_2 = \displaystyle\int_{\Gamma_2} \frac{z}{z^2-1}dz = \pi i$, prin urmare $I = I_1 + I_2 = 2\pi i$, pentru orice $a > 1$. ■

6.3 Integrala nedefinită

Rezultatul demonstrat mai jos este o consecinţă a teoremelor lui Cauchy.

Fie $f(z)$ o funcţie olomorfă pe un domeniu simplu conex D din planul complex (z). Fixăm un punct $z_0 \in D$ şi notăm

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

integrala de–a lungul unei anumite curbe situată în întregime în D şi care leagă punctele z_0 şi z. În baza teoremei lui Cauchy, această integrală este independentă de curba de integrare din domeniul D, deci este o funcţie uniformă de limita superioară de integrare z definită pe D. Notând această funcţie cu $\Phi(z)$, avem

$$\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta = \Phi(z). \tag{6.25}$$

Teorema 6.3.1 *Dacă funcţia $f(z)$, definită şi continuă în domeniul simplu conex D, are proprietatea că integrala acesteia pe orice contur Γ, în întregime inclus în D, este egală cu zero, atunci funcţia $\Phi(z)$ din* (6.25) *este olomorfă în D, $\Phi'(z) = f(z)$ şi $\Phi'(z)$ este funcţie continuă pe D.*

Demonstraţie. Evaluăm raportul incrementar al funcţiei $\Phi(z)$ în vecinătatea punctului z

$$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\Big(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta\Big) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta.$$

Deoarece integralele care apar sunt independente de drum, alegem drept curbă ce uneşte punctele z şi $z+\Delta z$ segmentul de dreaptă de extremităţi z şi $z+\Delta z$.

În baza relaţiei evidente $\displaystyle\int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$, putem scrie

$$\Big|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\Big| = \frac{1}{|\Delta z|}\Big|\int_{z}^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\Big|.$$

Aplicând proprietatea (6.9), găsim

$$\Big|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\Big| \le \max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta)-f(z)|.$$

În baza continuităţii funcţiei f în punctul z, pentru orice număr pozitiv ε există $\delta>0$ astfel încât $|\Delta z|<\delta$ implică $\displaystyle\max_{\zeta\in[z,z+\Delta z]} |f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, astfel că pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ cu proprietatea

$$\Big|\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} - f(z)\Big| < \varepsilon, \quad \text{pentru} \quad 0<|\Delta z|<\delta.$$

Din aceasta inegalitate rezultă că există limita în $\Delta z = 0$ a raportului incrementar al funcţiei $\Phi(z)$ în vecinătatea punctului z şi această limită este $f(z)$. Prin urmare, putem scrie

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} = \Phi'(z) = f(z),$$

ce arată că $\Phi(z)$ este o funcţie olomorfă în domeniul D, $\Phi'(z) = f(z)$ şi derivata sa este funcţie continuă pe D deoarece f este continuă pe D. ■

Teorema 6.3.1 sugerează introducerea noţiunii de *integrală nedefinită a unei funcţii complexe de o variabilă complexă.*

Definiţia 6.3.1 *O funcţie olomorfă* $\Phi(z)$ *se numeşte* **primitiva** *funcţiei* $f(z)$ *în domeniul* D *dacă în acest domeniu are loc relaţia* $\Phi'(z) = f(z)$.

Este evident că funcţia $f(z)$ are o infinitate de primitive şi oricare două asemenea primitive diferă printr–o constantă.

Definiţia 6.3.2 *Mulţimea tuturor primitivelor funcţiei* $f(z)$ *se numeşte* **integrala nedefinită** *a funcţiei* $f(z)$.

La fel ca în cazul funcţiilor reale, are loc relaţia

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)\, d\zeta = F(z_2) - F(z_1),$$

unde $F(z)$ este o primitivă a lui $f(z)$.

Într-adevăr, integrala din membrul drept este independentă de calea de integrare şi drept urmare

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_2} f(z)dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz, \tag{6.26}$$

unde z_0 este un punct arbitrar din domeniul D. Conform relaţiei (6.25), fiecare din integralele din membrul doi a egalităţii (6.26) este o primitivă a funcţiei $f(z)$.

Deoarece oricare două primitive ale funcţiei $f(z)$ diferă printr–o constantă, nu are importanţă care primitivă este folosită în (6.26).

Exemplul 6.3.1 *Un exemplu de interes pentru mai târziu este funcţia definită prin integrala*

$$f(z) = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{6.27}$$

Soluţie. Să observăm că integrantul lui (6.27) este o funcţie analitică (olomorfă şi cu derivata funcţie continuă) în întreg planul complex, cu excepţia punctului $z = 0$. Curba pe care se face integrarea în (6.27) nu trebuie să conţină originea care este pol simplu pentru funcţia de integrat. În orice domeniu care nu conţine originea, funcţia $f(z)$ este uniformă iar integrala din membrul doi al relaţiei (6.27) nu depinde de drumul de integrare. Pentru

a se realiza aceasta vom considera planul complex (z) căruia i s–a efectuat o tăietură, care ar putea fi semiaxa reală nepozitivă.

Prin urmare, domeniul maxim D în care funcţia $f(z)$ din (6.27) poate fi definită este $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$. Vom presupune că drumul de integrare în (6.27) se află în întregime în domeniul de mai sus, deci nu intersectează tăietura şi nici nu trece prin origine.

Alegând drept cale de integrare segmentul $[1, x]$, avem

$$f(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = \ln x \tag{6.28}$$

şi deci pentru valori pozitive ale argumentului, funcţia $f(z)$ coincide cu funcţia logaritm natural de o variabilă reală. Prin urmare, pentru funcţia (6.27) definită în domeniul $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, avem

$$\operatorname{Log} z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{6.29}$$

Egalitatea (6.29) poate fi considerată definiţia ramurii principale a funcţiei logaritmice în complex. În baza relaţiei (6.25) avem

$$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}. \tag{6.30}$$

Aşadar, în domeniul $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, derivata funcţiei logaritmice are aceeaşi expresie cu cea a funcţiei reale $\ln x$, cu deosebirea că se înlocuieşte x cu z. ■

6.4 Integrala Cauchy

Teoremele lui Cauchy dau posibilitatea stabilirii unei relaţii numită *formula integrală a lui Cauchy.*

6.4.1 Deducerea formulei integrale a lui Cauchy

Fie funcţia complexă de variabilă complexă f, olomorfă într–un domeniu simplu conex D, conturul Γ situat în D şi z un punct interior domeniului $\Delta \subset D$ de frontieră Γ. Să considerăm integrala

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{6.31}$$

unde variabila complexă de integrare ζ descrie întreg conturul Γ. Privită ca funcţie de ζ, expresia de sub semnul integralei (6.31) este olomorfă în Δ, cu excepţia punctului $\zeta = z$ unde devine infinită dacă $f(z) \neq 0$. Izolăm punctul z cu un cerc γ de rază suficient de mică astfel încât să nu existe puncte comune cu Γ. Atunci, Teorema 6.2.3 ne dă

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{6.32}$$

Pentru $\varepsilon > 0$ există $r > 0$ suficient de mic pentru ca γ să nu intersecteze cercul Γ, astfel încât $(\forall)\ \zeta \in \gamma$ să avem

$$f(\zeta) = f(z) + \eta(\zeta, z), \quad |\eta(\zeta, z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \quad (\forall)\ \zeta \in \gamma, \tag{6.33}$$

ceea ce este posibil, căci $f(z)$ este olomorfă, deci continuă pe mulţimea Δ. Avem

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_\gamma \frac{f(z) + \eta(\zeta, z)}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \int_\gamma \frac{\eta(\zeta, z)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{6.34}$$

Dar

$$\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i, \quad \Big| \int_\gamma \frac{\eta(\zeta, z)}{\zeta - z}\, d\zeta \Big| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot |2\pi i| = \varepsilon. \tag{6.35}$$

Deoarece în (6.35) ε se poate alege oricât de mic, urmează

$$\int_\gamma \frac{\eta(\zeta, z)}{\zeta - z} = 0. \tag{6.36}$$

Folosind (6.35) şi (6.36) în (6.34), deducem

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 2\pi i f(z),$$

din care rezultă *formula integrală a lui Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \tag{6.37}$$

fundamentală în teoria funcţiilor analitice.

Formula (6.37) arată că *dacă se ştiu valorile funcţiei $f(\zeta)$ pe conturul Γ, iar funcţia $f(\zeta)$ este olomorfă într–un domeniu simplu conex D care conţine în interior pe Γ, valoarea funcţiei f este determinată în orice punct z interior lui Γ.*

Observaţia 6.4.1 *În* (6.37) *integrarea se face de–a lungul conturului* Γ *în întregime situat în domeniul de olomorfie al funcţiei* $f(\zeta)$ *şi care conţine punctul* z. *Dacă se impune şi condiţia de continuitate a lui* f *în domeniul închis* $\overline{D} = D \cup \partial D$, *în baza Teoremei* 6.2.2 *rezultă o formulă similară celei din* (6.37), *dar în care integrarea se face de–a lungul conturului* C *al domeniului simplu conex* D. *Aşadar*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{6.38}$$

Observaţia 6.4.2 *Consideraţiile de mai sus rămân valabile şi în cazul unui domeniu multiplu conex* D *având frontiera exterioară* C_0 *şi frontierele interioare curbele închise, netede pe porţiuni* $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *disjuncte două câte două şi în întregime situate în interiorul lui* C_0. *Cu condiţia suplimentară de continuitate a funcţiei* f *pe închiderea domeniului* D, *are loc formula*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{C_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \cdots - \int_{C_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta\Big). \tag{6.39}$$

Exerciţiul 6.4.1 *Se cere valoarea integralei*

$$I = \int_\Gamma \frac{z\,\cos \pi z}{z^2 - 1}dz,$$

unde Γ *este o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porţiuni, care nu conţine punctele* -1 *şi* 1.

Soluţie. Fie Δ domeniul mărginit care are ca frontieră curba Γ. Se disting cazurile:

1. Δ nu conţine nici unul din punctele -1 şi 1. În acest caz, $\Delta \cup \Gamma = \overline{\Delta}$ este inclus în domeniul de olomorfie al funcţiei $z \mapsto \dfrac{z\,\cos \pi z}{z^2 - 1}$, deci $I = 0$;

2. $1 \in \Delta$ iar $-1 \notin \Delta$. Funcţia f_1 cu valorile $f_1(z) = \dfrac{z\,\cos \pi z}{z + 1}$ este olomorfă pe $\overline{\Delta}$ şi, conform formulei integrale a lui Cauchy,
$$I = \int_\Gamma \frac{f_1(z)}{z - 1}dz = 2\pi i f_1(1) = -\pi i;$$

3. $-1 \in \Delta$, $1 \notin \Delta$. Funcţia $f_2(z) = \dfrac{z\,\cos \pi z}{z - 1}$ este olomorfă pe Δ, deci
$$I = \int_\Gamma \frac{f_2(z)}{z + 1}dz = 2\pi i f_2(-1) = -\pi i;$$

4. $-1 \in \Delta$, $1 \in \Delta$. În acest caz, considerăm discurile ω_1 şi ω_2 de centre -1, respectiv 1 şi de raze suficient de mici astfel încât $\overline{\omega}_1 \cup \overline{\omega}_2 \subset \Delta$ şi cercurile frontieră $\gamma_1 = \partial\omega_1$, $\gamma_2 = \partial\omega_2$ să nu aibă puncte comune. Conform Teoremei 6.2.4, are loc o egalitate de forma (6.21)

$$\int_\Gamma \frac{z\,\cos\pi z}{z^2-1}dz = \int_{\Gamma_1} \frac{z\,\cos\pi z}{z^2-1}dz + \int_{\Gamma_2} \frac{z\,\cos\pi z}{z^2-1}dz,$$

cele două integrale din membrul doi încadrându–se în câte unul din cazurile precedente şi deci $I = -2\pi i$. ■

6.4.2 Consecinţe ale formulei lui Cauchy

Există remarci importante referitoare la formula integrală a lui Cauchy scrisă sub forma (6.38) sau sub forma (6.39), după cum domeniul D este simplu sau multiplu conex.

O integrală de forma $\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ de–a lungul unui contur Γ situat în întregime în domeniul de olomorfie D al funcţiei complexe f are sens pentru orice punct z situat în planul complex şi care nu este pe frontiera domeniului. Dacă z se află în interiorul domeniului Δ limitat de curba închisă şi netedă pe porţiuni Γ, atunci valoarea integralei este $2\pi i f(z)$; dacă z este situat în afara conturului Γ, valoarea integralei este zero, deoarece în acest caz integrantul este funcţie olomorfă pe domeniul Δ şi, conform Teoremei 6.2.2, integrala este nulă. Astfel, avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad = \quad \begin{cases} f(z), & \text{dacă} \quad z \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă} \quad z \notin \Delta \cup \Gamma. \end{cases} \tag{6.40}$$

Pentru $z \in \Gamma$ integrala $I(z) = \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$ nu există în snsul obişnuit; totuşi, în condiţii suplimentare asupra comportării funcţiei $f(\zeta)$ pe conturul Γ, acestei integrale i se poate atribui o valoare. Astfel, dacă pe conturul Γ funcţia $f(\zeta)$ satiface condiţia Hölder

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \le |\zeta_1 - \zeta_2|^\nu, \quad 0 < \nu < 1,$$

atunci integrala $I(z)$ există în sensul *valorii principale a lui Cauchy*:

$$VP\,I(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

unde Γ_ε este porţiunea din Γ, exterioară cercului $|\zeta - z| < \varepsilon$. Se demonstrează că

$$VP\,I(z) = \frac{1}{2}f(z)$$

şi prin urmare (6.40) devine

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \;=\; \begin{cases} f(z), & \text{dacă} \quad z \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă} \quad z \notin \Delta \cup \Gamma, \\ \frac{1}{2}f(z), & \text{dacă} \quad z \in \Gamma. \end{cases} \tag{6.41}$$

Exerciţiul 6.4.2 *Să se calculeze integrala* $I(a) = \displaystyle\int_\Gamma \frac{z^n}{z-a}dz$, $n \in I\!N$, *pe cercul* Γ *cu centrul în origine şi raza egală cu* 1 *şi din rezultatul găsit să se deducă valoarea principală în sensul lui Cauchy pentru două integrale improprii reale cu singularitatea în intervalul de integrare.*

Soluţie. Conform (6.41), avem

$$I(a) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad |a| > 1, \\ 2\pi i a^n, & \text{dacă} \quad |a| < 1. \end{cases}$$

În cazul când $|a| = 1$, rezultă că $a \in \Gamma$ şi integrala se calculează în sensul valorii principale a lui Cauchy. Prin urmare, scriem scrie

$$VP\,I(a) = VP\int_\Gamma \frac{z^n}{z-a}dz = \pi i a^n.$$

Dacă punem în evidenţă partea reală şi partea imaginară a ultimei integrale, din ultimul rezultat putem deduce valoarea principală în sens Cauchy pentru alte două integrale reale.

Pentru aceasta, fie $\varphi \in [0, 2\pi]$ argumentul numărului complex $a \in \Gamma$, deci $a = e^{i\varphi}$. Parametrizăm cercul Γ prin $\theta \to z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ şi ultima integrală devine $VP\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\theta}}{e^{in\theta} - e^{in\varphi}}\, e^{i\theta}\, d\theta = \pi e^{in\varphi}$. Dar,

$$\frac{e^{in\theta}}{e^{in\theta} - e^{in\varphi}} = \frac{1}{1 - e^{i(\varphi - \theta)}} = \frac{1}{2}\Big(1 + i\,\frac{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\Big),$$

astfel că , introducând în egalitatea de mai sus, rezultă

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}d\theta + \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\, e^{in\theta}\, d\theta = \pi e^{in\varphi}.$$

Prima integrală este nulă. Egalând părţile reale şi imaginare, obţinem

$$\begin{aligned} VP\int_0^{2\pi} \frac{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\cos n\theta\, d\theta &= 2\pi \sin n\varphi, \\ VP\int_0^{2\pi} \frac{\cos\frac{\varphi-\theta}{2}}{\sin\frac{\varphi-\theta}{2}}\sin n\theta\, d\theta &= -2\pi \cos n\varphi, \end{aligned}$$

care sunt valorile principale în sens Cauchy pentru două integrale improprii cu singularitatea în punctul $\theta = \varphi$. ■

O altă consecinţă a formulei integrale a lui Cauchy este *formula valorii medii* care exprimă valoarea unei funcţii olomorfe în centrul unui cerc ca o medie (o integrală) a valorilor sale pe frontiera cercului. Să deducem această formulă.

Fie $f(z)$ o funcţie olomorfă în domeniul simplu conex D şi fie z_0 un punct oarecare al acestui domeniu. Fiind un punct interior, se poate descrie cercul C_{R_0} de rază R_0 cu centrul în z_0 care să fie în întregime situat în D. Folosind formula integrală a lui Cauchy, obţinem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_0}} \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Deoarece pe cercul C_{R_0} avem $z = z_0 + R_0\, e^{i\varphi}$, obţinem relaţia

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R_0 e^{i\varphi})d\varphi,$$

care se mai scrie în forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R_0}\int_{C_{R_0}} f(z)ds, \tag{6.42}$$

unde $ds = R_0 d\varphi$ este elementul de arc al cercului.

Relaţia (6.42) se numeşte *formula valorii medii.*

6.5 Integrale depinzând de parametru

Funcţia de integrat din formula lui Cauchy (6.39) depinde de două variabile: variabila de integrare ζ aparţinând unei curbe C pe care se face integrarea şi $z \in D$, unde D este un domeniu oarecare iar C este o curbă oarecare.

Astfel, integrala Cauchy este o integrală depindzând de parametrul z.

Să studiem proprietăţile generale ale integralei Cauchy.

Fie dată o funcţie complexă de două variabile complexe $\varphi(z,\zeta)$ unic definită pentru valorile variabilei complexe $z = x + iy$ dintr–un domeniu D şi pentru valorile unei variabile complexe $\zeta = \xi + i\eta$ care aparţine unei curbe netede pe porţiuni C.

Poziţiile domeniului D şi curbei C pot fi oricare.

Să presupunem că sunt satisfăcute următoarele condiţii:

1. Pentru orice valoare a lui $\zeta \in C$, funcţia $\varphi(z,\zeta)$ este analitică în domeniul D, adică $\varphi(z,\zeta)$ este funcţie olomorfă în raport cu variabila z şi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ este funcţie continuă pe mulţimea $D \times C$;

2. Funcţiile $\varphi(z,\zeta)$ şi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)$ sunt continue de variabilele z,ζ luate împreună pentru o variaţie arbitrară a lui z în domeniul D şi al lui ζ pe curba C.

Condiţia a doua semnifică faptul că părţile reală şi imaginară a derivatei de mai sus sunt continue în raport cu variabilele x, y, ξ, η.

Cu presupunerile făcute, integrala funcţiei $\varphi(z,\zeta)$ de–a lungul curbei C există pentru orice $z \in D$ şi această integrală este o funcţie de variabila z,

$$F(z) = \int_C \varphi(z,\zeta)\, d\zeta. \tag{6.43}$$

Prezentăm o proprietate fundamentală a funcţiei $F(z)$ definită în (6.43).

Teorema 6.5.1 *Funcţia $F(z)$ definită de* (6.43) *este olomorfă în domeniul D şi derivata sa se poate calcula derivând funcţia de sub semnul integrală în raport cu variabila z.*

Demonstraţie. Să notăm cu $u(x,y,\xi,\eta)$ şi $v(x,y,\xi,\eta)$ părţile reală şi imaginară ale funcţiei $\varphi(z,\zeta)$. Atunci partea reală a funcţiei $F(z)$ este integrala curbilinie reală de speţa a doua

$$U(x,y) = \int_C u(x,y,\xi,\eta)\, d\xi - v(x,y,\xi,\eta)\, d\eta.$$

Deoarece am presupus că funcţiile u şi v posedă derivate parţiale continue, derivatele parţiale ale funcţiei $U(x,y)$ există şi pot fi calculate derivând sub semnul integral:

$$U_{,x}(x,y) = \int_C u_{,x}\, d\xi - v_{,x}\, d\eta; \quad U_{,y}(x,y) = \int_C u_{,y}\, d\xi - v_{,y}\, d\eta.$$

Aceste derivate sunt, la rândul lor, funcţii continue de variabilele x şi y în domeniul D.

În baza proprietăţilor similare ale funcţiei $V(x,y)$ şi ţinând cont că $\varphi(z,\zeta)$ satisface condiţiile Cauchy–Riemann, obţinem:

$$\begin{aligned} V_{,y}(x,y) &= \int_C v_{,y}\,d\xi + u_{,y}\,d\eta &= \int_C u_{,x}\,d\xi - v_{,x}\,d\eta &= U_{,x} \\ V_{,x}(x,y) &= \int_C v_{,x}\,d\xi + u_{,x}\,d\eta &= -\int_C u_{,y}\,d\xi - v_{,y}\,d\eta &= -U_{,y}. \end{aligned}$$

Aceste relaţiil arată că $F(z)$ satisface condiţiile Cauchy–Riemann ceea ce demonstrează că funcţia $F(z)$ este olomorfă în domeniul D. Să observăm că

$$\begin{aligned} F'(z) &= U_{,x}(x,y) + iV_{,x}(x,y) = \\ &= \int_C u_{,x}\,d\xi - v_{,x}\,d\eta + i\int_C v_{,x}\,d\xi + u_{,x}\,d\eta = \int_C \frac{\partial\varphi}{\partial z}(z,\zeta)\,d\zeta. \end{aligned}$$

Aşadar, este posibil să calculăm derivata integralei derivând parţial în raport cu paramterul sub integrală, iar dacă $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ satisface cele două condiţii de mai sus, $F'(z)$ este funcţie olomorfă în domeniul D. ■

6.6 Expresia derivatelor unei funcţii olomorfe

Proprietatea stabilită în Teorema 6.5.1 permite calculul derivatelor unei funcţii olomorfe şi stabilirea unei proprietăţi importante ale acestor derivate.

După cum am văzut, valoarea funcţiei $f(z)$, olomorfă într–un anumit domeniu D mărginit de conturul C şi continuă pe închiderea acestui domeniu pot fi exprimate în punctele interioare ale acestui domeniu în funcţie de valorile funcţiei pe contur:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{6.44}$$

Să considerăm un subdomeniu închis D' al domeniului D ale cărui puncte, inclusiv cele de pe frontieră, au proprietatea că distanţa până la punctele frontierei C sunt mai mari sau egale cu numărul pozitiv d. Prin urmare, avem $|z-\zeta| \geq d$.

Atunci, funcţia $\varphi(z,\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ este o funcţie de z olomorfă în domeniul D' şi $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ este o funcţie continuă de argumentele sale în

D'. În baza proprietăţilor generale ale integralelor depinzând de parametru, derivata $f'(z)$ se poate reprezenta în punctele interioare ale domeniului D' în forma

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta. \tag{6.45}$$

Integrala (6.45) este tot o integrală care depinde de un parametru şi funcţia de integrat are aceleaşi proprietăţi ca şi integrala (6.44). În consecinţă, $f'(z)$ este o funcţie analitică în domeniul D' şi are loc formula

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\,d\zeta. \tag{6.46}$$

Deoarece pentru orice punct $z \in D$ se poate construi un subdomeniu de forma D', formulele (6.45) şi (6.46) sunt adevărate în orice punct $z \in D$. În teorema de mai jos enunţăm rezultatul general.

Teorema 6.6.1 *Fie $f(z)$ o funcţie olomorfă în domeniul D şi continuă în domeniul închis $D \cup C$, unde C este frontiera lui D. Atunci există derivata de orice ordin a funcţiei $f(z)$ în punctele lui D şi are loc*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \quad (\forall)\ n \in I\!N, \quad (\forall)\ z \in D. \tag{6.47}$$

Demonstraţie. Relaţia (6.47) se obţine prin repetarea raţionamentului precedent care ne–a condus la expresiile primelor două derivate ale funcţiei $f(z)$. ■

Aşadar, dacă $f(z)$ este olomorfă în domeniul D, atunci $f(z)$ are derivate continue de orice ordin în acel domeniu. Această proprietate a unei funcţii de variabilă complexă o distinge în mod esenţial de o funcţie de o variabilă reală care are prima derivată continuă într–un anumit domeniu. În cazul funcţiilor de o variabilă reală, existenţa derivatelor de ordin superior nu rezultă din existenţa primei derivate.

Teorema 6.6.2 (**Teorema lui Morera**) *Dacă f este o funcţie complexă continuă într–un domeniu simplu conex D şi are proprietatea că integrala sa pe orice contur inclus în D este nulă, atunci f este funcţie olomorfă pe D.*

Demonstraţie. În ipotezele acestei teoreme, s–a demonstrat că funcţia $F(z) = \displaystyle\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta$, unde z_0 şi z sunt puncte arbitrare din D şi integrala este considerată pe orice drum cu extremităţile z_0 şi z care este în întregime

situat în D, este o funcţie olomorfă în D şi $F'(z) = f(z)$. Însă, derivata unei funcţii olomorfe este o funcţie olomorfă, ceea ce înseamnă că există o derivată tot continuă a funcţiei $F'(z)$, şi anume funcţia $F''(z) = f'(z)$. ■

Observaţia 6.6.1 *Teorema* 6.6.2 *este, într–un anumit sens, inversa Teoremei lui Cauchy. Ea poate fi generalizată pentru domenii multiplu conexe.*

Teorema 6.6.3 (**Teorema lui Liouville**) *Dacă $f(z)$ este funcţie olomorfă în planul complex şi modulul ei este uniform mărginit, atunci $f(z)$ este identic egală cu o constantă.*

Demonstraţie. Din ipoteză rezultă că există $M > 0$ astfel încât în toate punctele z ale planului să avem

$$|f(z)| \leq M. \tag{6.48}$$

Folosind formula (6.45), obţinem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta, \tag{6.49}$$

unde C_R este cercul $|\zeta - z| = R$. Aplicând (6.42), deducem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi R^2}\int_{C_R} f(\zeta)\,ds, \tag{6.50}$$

unde ds este elementul de arc al cercului C_R.

Aplicând proprietatea (6.8) şi folosind (6.48), din (6.50) obţinem:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi R^2}\int_{C_R} |f(\zeta)|\,ds \leq \frac{M}{R}. \tag{6.51}$$

Deoarece am considerat întreg planul, raza R se poate alege oricât de mare şi această alegere nu depinde de funcţia $f(z)$ şi nici de derivata sa. Rezultă astfel că $|f'(z)| = 0$. Cum z este arbitrar, deducem că $f'(z) \equiv 0$ în întreg planul complex. Deci $f(z)$ este funcţia constantă deoarece aceasta este singura funcţie definită în întreg planul care are derivata identic nulă.■

Am introdus funcţiile trigonometrice şi am demonstrat că ele sunt funcţii analitice în întreg planul complex. În baza Teoremei 6.6.3 ele nu pot fi uniform mărginite în planul complex căci dacă ar fi astfel, fiecare din ele ar fi funcţia constantă.

Rezultă că există valori ale lui z astfel încât $|\sin z| > 1$.

Prin urmare, funcţiile trigonometrice de o variabilă complexă diferă esenţial de funcţiile corespunzătoare din real.

Capitolul 7

Serii de funcţii analitice în complex

În acest capitol se vor examina unele proprietăţi ale seriilor de funcţii ale căror termeni sunt funcţii complexe de o variabilă complexă. Un rol special în teoria funcţiilor de variabilă complexă îl au *seriile de funcţii analitice* şi, în particular, *seriile de puteri*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

unde c_n sunt numere complexe cunoscute iar z_0 este un punct fixat din planul complex. Studiul acestor serii este important atât pentru stabilirea unor proprietăţi ale funcţiilor complexe de o variabilă complexă cât şi în aplicaţii.

7.1 Funcţii analitice

Definiţia 7.1.1 *Funcţia complexă de variabilă complexă* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ *se numeşte* **funcţie analitică** *în domeniul* $D \subset \mathbb{C}$ *dacă* $f(z)$ *este olomorfă şi derivata* $f'(z)$ *este continuă în* D.

Observaţia 7.1.1 *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca funcţia complexă de variabilă complexă* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *să fie analitică în domeniul* $D \subset \mathbb{C}$ *este existenţa derivatelor parţiale continue ale funcţiilor* $u(x, y)$

şi $v(x,y)$ *care să satisfacă condiţiile Cauchy–Riemann*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y). \end{cases} \tag{7.1}$$

Vom vedea că noţiunea de funcţie analitică este fundamentală în teoria funcţiilor complexe de o variabilă complexă datorită rolului important în rezolvarea multor probleme de matematică pură şi în diverse aplicaţii ale funcţiilor complexe de o variabilă complexă.

Relaţile Cauchy–Riemann (7.1) se pot da şi sub altă formă.

Deoarece numărul complex $z = x + iy \in D$ se poate scrie sub forma exponenţială $z = re^{i\varphi}$, unde $r = |z|$ şi $\varphi = \operatorname{Arg} z$, rezultă că valorile funcţiei $f(z)$ se pot da astfel încât părţile reală şi imaginară să depindă de r şi φ, adica

$$f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi).$$

Cunoscând legăturile între r, φ şi x, y

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \tag{7.2}$$

şi folosind derivarea funcţiilor compuse, din (7.1) şi (7.2) obţinem o altă formă a condiţiilor Cauchy–Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial r}. \end{cases} \tag{7.3}$$

Dacă valoarea funcţiei f într–un punct oarecare z al domeniului D în care este analitică se scrie în forma $f(z) = R(x,y)\, e^{i\Phi(x,y)}$, atunci condiţiile Cauchy–Riemann sunt

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = R\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = -R\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, \end{cases} \tag{7.4}$$

unde $R(x,y)$ şi $\Phi(x,y)$ sunt modulul şi respectiv argumentul lui $f(z)$.

Dacă funcţia $f(z)$ este analitică în domeniul D, atunci pentru $f'(z)$ pot fi date următoarele patru expresii:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y); \tag{7.5}$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y); \tag{7.6}$$

$$f'(z) = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big); \tag{7.7}$$

$$f'(z) = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\Big). \tag{7.8}$$

Din Definiţia 7.1.1 şi Definiţia 5.5.1 rezultă că funcţiile analitice sunt olomorfe, prin urmare proprietăţile funcţiilor olomorfe sunt adevărate şi pentru funcţiile analitice.

7.2 Serii de funcţii de o variabilă complexă, uniform convergente

Considerăm şirul de funcţii complexe de variabilă complexă (u_n), unde $u_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ sunt funcţii uniforme definite pe domeniul D şi seria de funcţii asociată acestui şir

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{7.9}$$

Observaţia 7.2.1 *O serie de funcţii complexe uniforme este ansamblul seriilor de numere complexe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z), \tag{7.10}$$

unde z este un punct oarecare al lui D.

În cele ce urmează, o serie de funcţii complexe va fi notată fie în forma (7.9), fie în forma (7.10).

Definiţia 7.2.1 *Seria de funcţii complexe de variabilă complexă* (7.9) *se numeşte* **convergentă** *în domeniul D dacă pentru orice $z \in D$ seria de numere complexe* (7.10) *este convergentă.*

Dacă seria(7.9) este convergentă în domeniul D, atunci în D se poate defini o funcţie complexă uniformă f a cărei valoare în fiecare punct $z \in D$ este suma seriei numerice (7.10). Această funcţie se numeşte *suma seriei* (7.9) în domeniul D.

În baza definiţiei convergenţei unei serii, pentru orice punct fixat $z \in D$ şi pentru orice număr pozitiv ε există un număr natural N, care depinde de ε şi z, astfel încât

$$|f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice} \quad n > N(\varepsilon, z).$$

La fel ca în cazul seriilor de funcţii reale de variabilă reală, noţiunea de *convergenţă uniformă* joacă un rol important în teoria funcţiilor de variabilă complexă.

Definiţia 7.2.2 *Dacă pentru orice număr pozitiv ε există un număr natural N care să depindă numai de ε astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ inegalitatea*

$$|f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z)| < \varepsilon \tag{7.11}$$

să fie satisfăcută pentru toate punctele $z \in D$, seria (7.9) *se numeşte* **uniform convergentă** *în domeniul D.*

Dacă $r_n(z) = \sum_{n+1}^{\infty} u_k(z)$, *restul de ordin n al seriei* (7.10), condiţia (7.11) se poate scrie în forma

$$|r_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall)\ n > N(\varepsilon), \quad \text{şi} \quad z \in D. \tag{7.12}$$

Prezentăm unele proprietăţi remarcabile ale seriilor uniform convergente de funcţii complexe care sunt asemănătoare seriilor de funcţii reale de variabilă reală uniform convergente.

Teorema 7.2.1 (**Criteriul lui Weierstrass**) *Dacă toţi termenii seriei de funcţii complexe* (7.10) *satisfac condiţia*

$$|u_n(z)| \le |a_n|, \quad (\forall)\ z \in D, \tag{7.13}$$

şi seria de numere reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă, atunci seria (7.9) *este uniform convergentă pe domeniul D.*

Demonstraţie. Din definiţia seriei absolut convergente, rezultă că seria numerică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este o serie convergentă, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N$ astfel încât $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$. Însă, din (7.13) şi criteriul lui Cauchy de convergenţă a unei serii numerice rezultă că în domeniul D au loc inegalităţile

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(z)\Big| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(z)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon, \quad (\forall)\ n > N(\varepsilon),$$

care demonstrează convergenţa uniformă a seriei (7.9) în domeniul D. ■

După cum se constată, criteriul lui Weierstrass este o condiţie suficientă pentru uniforma convergenţă a unei serii de funcţii complexe.

Teorema 7.2.2 (**Criteriul lui Cauchy**) *O condiţie necesară şi suficientă de convergenţă uniformă a seriei* (7.9) *într–un domeniu D este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât în toate punctele lui D*

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall)\ n > N(\varepsilon), \quad m \in I\!N^*, \tag{7.14}$$

unde $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)$ este suma parţială de rang n a seriei.

Demonstraţie. Necesitatea. Din convergenţa uniformă a seriei (7.9) rezultă că $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât în toate punctele $z \in D$ au loc inegalităţile

$$|f(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(z) - S_{n+m}(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.15}$$

pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi pentru orice număr natural m. Pe de altă parte,

$$|S_{n+m}(z) - S_n(z)| \le |S_n(z) - f(z)| + |f(z) - S_{n+m}(z)|. \tag{7.16}$$

Folosind (7.15) şi (7.16), deducem (7.14).

Suficienţa. Din relaţia (7.14) rezultă că pentru orice $z \in D$ fixat, şirul de numere complexe $(S_n(z))$ este convergent. Aceasta înseamnă că seria de numere complexe (7.10) este convergentă şi are suma

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z).$$

Prin trecere la limită pentru $m \to \infty$ în (7.14) se obţine

$$\lim_{m\to\infty} |S_{n+m}(z) - S_n(z)| = |f(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall)\ n > N(\varepsilon), \quad z \in D.$$

Aceasta demonstrează că seria de funcţii (7.10) este uniform convergentă în domeniul D. ■

Corolarul 7.2.1 *Dacă o serie de funcţii este uniform convergentă, termenul ei general tinde la zero.*

Să examinăm unele proprietăţi generale ale seriilor de funcţii complexe uniform convergente.

Teorema 7.2.3 *Dacă funcţiile $u_n \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ sunt continue în domeniul D, iar seria de funcţii complexe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge uniform în acest domeniu şi are suma $f(z)$, atunci $f(z)$ este o funcţie continuă în domeniul D.*

Demonstraţie. Pentru studiul continuităţii funcţiei f într–un punct oarecare $z \in D$, evaluăm expresia $|f(z + \Delta z) - f(z)|$, unde $z + \Delta z$ aparţine domeniului D.

În baza uniformei convergenţe a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ în domeniul D, pentru orice $\varepsilon > 0$ se găseşte un rang $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ astfel încât pentru toate punctele $z, z + \Delta z \in D$ au loc inegalităţile:

$$\Big|f(z + \Delta z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z + \Delta z)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad \Big|f(z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7.17}$$

Cum funcţiile $u_k(z)$ sunt continue în orice punct $z \in D$, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar şi un număr natural N, există $\delta > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} &\Big|\sum_{k=1}^{N} u_k(z + \Delta z) - \sum_{k=1}^{N} u_k(z)\Big| \le \\ &\le \sum_{k=1}^{N} |u_k(z + \Delta z) - u_k(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned} \tag{7.18}$$

pentru $|\Delta z| < \delta$. Din (7.17), (7.18) şi din faptul că valoarea absolută a sumei nu întrece suma valorilor absolute a termenilor ei, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât $|f(z + \Delta z) - f(z)| < \varepsilon$ pentru $|\Delta z| < \delta$, ceea ce demonstrează continuitatea funcţiei f în domeniul D. ■

Teorema 7.2.4 *Dacă seria de funcţii continue* (7.9) *este uniform convergentă pe un domeniu D şi are suma $f(z)$, atunci $f(z)$ este funcţie integrabilă pe orice curbă netedă pe porţiuni $C \subset D$ şi*

$$\int_C f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(\zeta)\, d\zeta, \tag{7.19}$$

sau

$$\int_C \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(\zeta)\, d\zeta. \tag{7.20}$$

Demonstraţie. Din convergenţa uniformă a seriei (7.10) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru toate punctele $\zeta \in D$

$$|r_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{L}, \quad \text{pentru} \quad n \geq N(\varepsilon),$$

unde L este lungimea curbei C. Atunci,

$$\Big|\int_C f(\zeta)\, d\zeta - \sum_{k=1}^{n} \int_C u_k(\zeta) d\zeta\Big| = \Big|\int_C r_n(\zeta)\, d\zeta\Big| \leq \int_C |r_n(\zeta)| ds < \varepsilon,$$

unde ds este elementul de arc al curbei. Aşadar seria de numere complexe din membrul drept al egalităţii (7.19) este convergentă şi are suma $\int_C f(\zeta)\, d\zeta$.■

Egalitatea (7.20) afirmă că, în ipotezele Teoremei 7.2.4, *integrala seriei este egală cu seria integralelor.*

Proprietăţile seriilor complexe uniform convergente formulate în Teorema 7.2.3 şi Teorema 7.2.4 sunt asemănătoare proprietăţilor corespunzătoare ale seriilor de funcţii reale de o variabilă reală, demonstraţiile acestor teoreme fiind aceleaşi.

Vom da o proprietate remarcabilă a seriilor de funcţii complexe uniform convergente.

Teorema 7.2.5 (Prima Teoremă a lui Weierstrass) *Dacă funcţiile u_n sunt analitice în domeniul D, iar seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este uniform convergentă pe orice subdomeniu închis $\overline{D}' \subset D$ şi are suma f, atunci:*

1. *f este funcţie analitică în domeniul D;*

2. $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z), \quad (\forall)\ z \in D;$

3. seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$ *este uniform convergentă în orice subdomeniu închis* $\overline{D}' \subset D$.

Demonstraţie.
1. Considerăm un punct arbitrar $z_0 \in D$ şi construim un domeniu simplu conex $D' \subset D$ astfel încât $z_0 \in D'$. Conform Teoremei 7.2.3, $f(z)$ este o funcţie continuă în D. Considerăm integrala funcţiei $f(z)$ de–a lungul unui contur $C \subset D'$. În baza Teoremei 7.2.4, aceasta integrală se poate calcula integrând termen cu termen seria (7.10) şi, deoarece funcţiile $u_n(z)$ sunt funcţii analitice, obţinem

$$\int_C f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Conform Teoremei lui Morera, $f(z)$ este funcţie analitică într–o vecinătate a punctului z_0. Deoarece alegerea punctului z_0 este arbitrară, $f(z)$ este analitică în domeniul D. De asemeni, funcţia

$$r_n(z) = \sum_{j=n+1}^{\infty} u_j(z) = f(z) - \sum_{j=1}^{n} u_j(z)$$

este analitică în D ca sumă finită de funcţii analitice în D.

2. Fixăm un punct $z_0 \in D$ şi alegem un contur $C \subset D'$ care să înconjure punctul z_0. Fie d distanţa dintre punctul z_0 şi conturul C şi seria

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(z)}{(z - z_0)^{k+1}}. \tag{7.21}$$

Deoarece $\min_{z \in C} |z - z_0| = d > 0$, această serie este convergentă uniform pe C în baza ipotezelor teoremei. Prin urmare, integrând termen cu termen egalitatea (7.21) de–a lungul conturului C şi ţinând cont de formulele lui Cauchy care exprimă derivatele unei funcţii analitice în funcţie de integrala Cauchy, obţinem

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z_0).$$

Deoarece $z_0 \in D$ este arbitrar, concluzia (2) este demonstrată.

3. Considerăm un subdomeniu închis $\overline{D}' \subset D$ şi construim un contur $C \subset D$, care să fie situat în exteriorul lui $\overline{D}'$. Trasarea conturului C se face astfel

încât punctele sale să fie la distanţa d de domeniul închis $\overline{D}'$ ceea ce se traduce prin inegalitatea $|z-\zeta| \geq d > 0$. Deoarece restul de ordin n al seria (7.10), notat cu $r_n(z)$, este funcţie analitică în D, rezultă că pentru orice punct $z \in D'$ avem relaţia

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_C \frac{r_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta = r_n^{(k)}(z),$$

membrul doi al egalităţii fiind restul de ordin n al seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(z)$. Din convergenţa uniformă a seriei (7.10) rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon) \in I\!N^*$ astfel încât pe conturul C şi pentru $n \geq N$ are loc evaluarea uniformă

$$|r_n(\zeta)| < \frac{2\pi d^{k+1}}{k!L}\varepsilon,$$

unde L este lungimea conturului C. Atunci

$$\left| r_n^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!}{2\pi}\int_C \frac{|r_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^{k+1}}\, ds < \varepsilon, \quad (\forall)\ z \in \overline{D}',$$

ceea ce demonstrează şi a treia concluzie a teoremei. ■

Observaţia 7.2.2 *Demonstraţia teoremei s–a făcut în cazul când domeniul D este simplu conex, însă nu este dificilă demonstraţia sa în cazul unui domeniu multiplu conex.*

Să observăm că această metodă de demonstraţie permite stabilirea uniformei convergenţe a seriei derivatelor numai în domenii închise arbitrare $\overline{D}' \subset D$, chiar dacă seria iniţială (7.10) este uniform convergentă în domeniul închis $\overline{D}$. Uniforma convergenţă a seriei (7.10) pe domeniul închis $\overline{D}$ nu implică uniforma convergenţă pe $\overline{D}$ a seriei derivatelor de un anumit ordin. Exemplul următor dovedeşte afirmaţia.

Exemplul 7.2.1 *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ *este uniform convergentă în discul închis cu centrul în origine de rază* 1, *iar seria derivatelor de primul ordin* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ *nu este uniform convergentă pe acest disc.*

Soluţie. Într-adevăr, în punctele discului închis $|z| \leq 1$ termenii $u_n(z)$ ai seriei date satisfac $|u_n(z)| \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Pe de altă parte, se ştie că seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind seria armonică generalizată cu exponentul $\alpha = 2 > 1$. Conform criteriului lui Weierstrass, seria de funcţii dată este uniform convergentă în discul închis $|z| \le 1$. Seria derivatelor, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}$, nu poate converge uniform în discul închis deoarece este divergentă în punctul $z = 1$ (seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă). ■

Observaţia 7.2.3 *Când s–a demonstrat Teorema* 7.2.5*, am presupus uniforma convergenţă a seriei într–un subdomeniu închis arbitrar* $\overline{D}' \subset D$*. Cu o modificare care se va vedea în teorema următoare, concluziile teoremei rămân valabile şi în cazul uniformei convergenţe a seriei* (7.10) *în domeniul închis* $\overline{D}$*.*

Teorema 7.2.6 (**A doua Teoremă a lui Weierstrass**) *Dacă funcţiile* $u_n(z)$ *sunt analitice într–un domeniu* D *şi continue pe închiderea* $\overline{D}$ *şi seria* (7.10) *converge uniform pe frontiera* Γ *a acestui domeniu, atunci seria este uniform convergentă în* $\overline{D}$*.*

Demonstraţie. Diferenţa a două sume parţiale ale seriei date, $S_{n+p}(z) - S_n(z)$, fiind o sumă finită de funcţii analitice, este o funcţie analitică pe D şi continuă pe $\overline{D}$. Din uniforma convergenţă pe Γ rezultă

$$|S_{n+p}(\zeta) - S_n(\zeta)| = |u_{n+1}(\zeta) + u_{n+2}(\zeta) + \cdots + u_{n+p-1}(\zeta) + u_{n+p}(\zeta)| < \varepsilon$$

pentru orice număr natural $n \ge N(\varepsilon)$, pentru orice număr natural p şi pentru toate punctele $\zeta \in \Gamma$. Conform *principiului maximului*, care afirmă că *dacă* $f(z)$ *este o funcţie analitică într–un domeniu* D *şi continuă pe domeniul închis* $\overline{D}$*, atunci sau* $|f(z)| \equiv$ *constant sau* $|f(z)|$ *îşi atinge valoarea maximă pe frontiera domeniului*, rezultă că

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad (\forall)\ n > N(\varepsilon), \quad (\forall)\ p \in I\!N^*, \quad (\forall)\ z \in \overline{D}.$$

Astfel, pentru seria dată este satisfăcută ipoteza din Teorema 7.2.2, deci seria este uniform convergentă în $\overline{D}$. ■

7.3 Serii de puteri în complex

7.3.1 Teorema lui Abel

În paragraful precedent s–au considerat serii generale de funcţii complexe de forma (7.9) fără a se specifica forma funcţiilor $u_n(z)$. Vom acorda interes seriilor de puteri, adică acele serii de forma (7.10) în care

$$u_n(z) = c_n(z - z_0)^n,$$

unde $c_n \in \mathbb{C}$ şi z_0 este un punct fixat al planului complex. Se obişnuieşte să se spună că seria de puteri *este centrată în* z_0. Termenii seriei de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{7.22}$$

sunt funcţii analitice în întreg planul complex şi deci teoremele din paragraful precedent pot fi aplicate acestor serii. După cum s–a văzut, multe proprietăţi importante ale seriilor de funcţii sunt consecinţe ale uniformei convergenţe ale seriilor respective astfel că pentru seria de puteri (7.22) este important să stabilim domeniul de uniformă convergenţă. Este evident că domeniul de convergenţă a unei serii de puteri este determinat de forma *coeficienţilor* c_n. De exemplu, seria de puteri în complex $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(z - z_0)^n$ converge doar în punctul z_0 deoarece raportul a doi termeni consecutivi a seriei modulelor $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = (n+1)|z - z_0| > 1$ pentru orice valoare fixată a lui z diferită de z_0 şi pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ începând de la un număr natural $N(z)$. În schimb, seria de puteri în complex $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z - z_0)^n}{n!}$, în baza criteriului lui D'Alembert, este convergentă în întreg planul complex.

Teorema de mai jos este fundamentală pentru determinarea domeniului de convergenţă a unei serii de puteri.

Teorema 7.3.1 (**Abel**) *Dacă seria de puteri* (7.22) *converge într–un punct* $z_1 \neq z_0$, *atunci ea este absolut convergentă în toate punctele* z *care satisfac condiţia* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, *iar în discul închis de rază* $\rho < |z_1 - z_0|$ *şi centrul în* z_0 *seria este uniform convergentă.*

Demonstraţie. Să luăm un punct arbitrar z care satisface condiţia $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ şi să considerăm seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n. \tag{7.23}$$

Condiţia pe care o satisface z implică existenţa unui număr pozitiv subunitar $q < 1$ cu proprietatea $|z - z_0| = q|z_1 - z_0|$. Cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ este convergentă, conform criteriului general al lui Cauchy, termenul ei general tinde la zero când $n \to \infty$. În consecinţă, există o constantă M astfel încât $|c_n| \cdot |z_1 - z_0|^n \le M$, de unde

$$|c_n| \le \frac{M}{|z_1 - z_0|^n}.$$

Seria (7.23) este atunci absolut convergentă deoarece valoarea absolută a termenilor săi satisface inegalitatea

$$|c_n| \cdot |z - z_0|^n \le M\Big|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\Big|^n$$

iar seria geometrică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, cu raţia $q = \Big|\dfrac{z - z_0}{z_1 - z_0}\Big| < 1$ este convergentă.

Pentru a demonstra uniforma convergenţă a seriei (7.22) în discul

$$|z - z_0| \le \rho < |z_1 - z_0|,$$

este suficient, conform criteriului lui Weierstrass (Teorema 7.2.1), să construim o serie majorantă de numere reale care să fie convergentă. Este evident că această serie este

$$M\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{|z_1 - z_0|^n}. \tag{7.24}$$

Seria (7.24) este majorantă pentru seria (7.22) în domeniul considerat şi, totodată, este convergentă fiind serie geometrică cu raţia subunitară. Teorema este astfel demonstrată. ■

Din Teorema lui Abel se deduc unele corolarii (consecinţe) care sunt utile în studiul seriilor de puteri în complex. Prezentăm în continuare şase astfel corolarii.

Corolarul 7.3.1 *Dacă seria de puteri* (7.22) *este divergentă într–un punct* z_1*, atunci ea este divergentă în toate punctele* z *care satisfac inegalitatea* $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Demonstraţie. Presupunând contrariul, găsim că în baza Teoremei lui Abel seria (7.22) ar trebui să fie convergentă în orice disc cu centrul în z_0 şi

rază $\rho < |z - z_0|$ şi în particular în punctul z_1, care aparţine discului, ceea ce contrazice ipoteza. ■

Considerăm marginea superioară R a distanţelor $|z - z_0|$ cu proprietatea că seria de funcţii corespunzătoare $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ este convergentă.

Dacă $R < +\infty$, atunci în toate punctele z' cu $|z' - z_0| > R$, seria de puteri corespunzătoare este divergentă. Dacă $R > 0$, atunci discul $|z - z_0| < R$ este domeniul maxim de convergenţă al seriei de puteri (7.22) şi seria este divergentă în punctele exterioare discului închis de rază R cu centrul în z_0. Pe frontiera discului, deci în punctele z cu proprietatea $|z - z_0| = R$, seria de puteri corespunzătoare poate fi convergentă sau divergentă. Domeniul $|z - z_0| < R$ se numeşte *discul de convergenţă* al seriei de puteri (7.22), iar numărul R este *raza de convergenţă.*

Am stabilit astfel

Corolarul 7.3.2 *Pentru orice serie de puteri există un număr $R \geq 0$ astfel încât în discul deschis de rază R cu centrul în z_0, seria de puteri* (7.22) *este convergentă, iar în exteriorul discului închis de rază R cu centrul în z_0 seria este divergentă.*

Corolarul 7.3.3 *Suma unei serii de puteri este o funcţie analitică pe discul de convergenţă.*

Demonstraţie. Termenii seriei de puteri (7.22) sunt funcţii analitice în întreg plnul complex; seria este uniform convergentă în orice subdomeniu închis inclus în discul de convergenţă. Deci, după prima teoremă a lui Weierstrass, suma seriei este o funcţie analitică. ■

Corolarul 7.3.4 *În interiorul discului de convergenţă, o serie de puteri poate fi integrată şi derivată termen cu termen ori de câte ori, razele de convergenţă ale seriilor de puteri obţinute fiind egale cu raza de convergenţă a seriei iniţiale.*

Demonstraţie. Afirmaţiile acestui corolar sunt consecinţe directe ale teoremelor lui Abel şi Weierstrass. ■

Corolarul 7.3.5 *Coeficienţii seriei de puteri* (7.22) *se exprimă cu ajutorul funcţiei sumă $f(z)$ prin formulele*

$$c_n = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_0). \tag{7.25}$$

Demonstraţie. Să notăm cu $f(z)$ suma seriei de puteri (7.22) în discul deschis cu centrul în z_0 şi rază r, $B(z_0,R)=\{z\in \mathbb{C}: |z-z_0|<R$. Luând $z=z_0$ în expresia

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{7.26}$$

obţinem $f(z_0)=c_0$.

Derivând termen cu termen seria (7.26), găsim

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\,(z-z_0)^{n-1}, \quad z\in B(z_0,R) \tag{7.27}$$

din care, punând $z=z_0$, obţinem $f'(z_0)=c_1$.

În mod analog, dacă punem $z=z_0$ în egalitatea

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)c_n\,(z-z_0)^{n-k}, \tag{7.28}$$

obţinută efectuând derivarea termen cu termen de $(k-1)$ ori în (7.27) şi adevărată pentru $z\in B(z_0,R)$, găsim $f^{(k)}(z_0)=c_k\cdot k!$. Procedeul poate continua obţinându–se astfel derivata de orice ordin.

Analiza rezultatelor demonstrează corolarul. ∎

Corolarul 7.3.6 *Raza de convergenţă R a seriei de puteri* (7.22) *este determinată de relaţia* [1]

$$R=\frac{1}{\ell}, \quad \textit{unde} \quad \ell=\limsup \sqrt[n]{|c_n|}, \tag{7.29}$$

unde prin limita superioară a şirului $(\sqrt[n]{|c_n|})$ *înţelegem cel mai mare punct limită*[2] *al şirului.*

Demonstraţie. Să notăm $\ell=\limsup\sqrt[n]{|c_n|}$ şi să presupunem că $0<\ell<\infty$. Trebuie să arătăm că în orice punct z_1 care satisface condiţia $|z_1-z_0|<\dfrac{1}{\ell}$, seria de puteri (7.22) este convergentă, iar în orice punct z_2 pentru care $|z_2-z_0|>\dfrac{1}{\ell}$, seria de puteri (7.22) este divergentă.

Deoarece ℓ este marginea superioară a şirului $(\sqrt[n]{|c_n|})$, pentru orice $\varepsilon>0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ cu proprietatea $\sqrt[n]{|c_n|}<\ell+\varepsilon$. Pe de altă

[1] Această relaţie se numeşte formula Cauchy–Hadamard.

[2] Elementul $a\in\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$ se numeşte *punct limită* al şirului (a_n) dacă există un subşir (a_{k_n}) al şirului dat care are limita a.

parte, pentru acelaşi ε este posibil să găsim o infinitate de termeni ai şirului $(\sqrt[n]{|c_n|})$ care să fie mai mari ca $\ell - \varepsilon$. Considerăm un punct arbitrar z_1 ce satisface inegalitatea $\ell|z_1 - z_0| < 1$ şi luăm ca valoare pentru ε numărul real $\dfrac{1 - \ell|z_1 - z_0|}{2|z_1 - z_0|} > 0$. Atunci

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_1 - z_0| < (\ell + \varepsilon)|z_1 - z_0| = \frac{1 + \ell|z_1 - z_0|}{2} = q < 1,$$

de unde rezultă că seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_1 - z_0)^n$ este majorată de seria geometrică $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ cu raţia q număr pozitiv subunitar. Aceasta demonstrează convergenţa seriei de puteri (7.22) în punctul z_1. Luând acum un punct z_2 care satisface inegalitatea $\ell|z_2 - z_0| > 1$ şi alegând $\varepsilon = \dfrac{\ell|z_2 - z_0| - 1}{|z_2 - z_0|} > 0$, obţinem

$$\sqrt[n]{|c_n|} \cdot |z_2 - z_0| > (\ell - \varepsilon)|z_2 - z_0| = 1$$

pentru o infinitate de valori ale lui n. De aici rezultă $|c_n(z_2 - z_0)^n| > 1$ şi, în baza condiţiei necesare de convergenţă a unei serii, seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z_2 - z_0)^n$ este divergentă.

Considerăm cazurile extreme ale lui ℓ.

Pentru $\ell = 0$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ converge în orice punct z, adică $R = \infty$. Într-adevăr, în acest caz, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încât $\sqrt[n]{|c_n|} < \varepsilon$ pentru n suficient de mare. Luând $\varepsilon = \dfrac{q}{|z - z_0|}$, unde z este un punct arbitrar din planul complex şi $0 < q < 1$, obţinem $|c_n(z - z_0)^n| < q^n$. Aceasta dovedeşte convergenţa seriei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$.

Pentru $\ell = \infty$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ diverge în orice punct $z \neq z_0$, adică $R = 0$. Într-adevăr, în acest caz, pentru orice număr M există o infinitate de coeficienţi c_n astfel încât $\sqrt[n]{|c_n|} > M$. Să considerăm un punct arbitrar $z \neq z_0$ şi să alegem M astfel încât $M|z - z_0| = q > 1$. Atunci o infinitate de termeni ai seriei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ satisface condiţia $|c_n(z - z_0)^n| > 1$, ceea ce demonstrează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ este divergentă.

Astfel, formula Cauchy–Hadamard $R = \dfrac{1}{\ell}$, unde $\ell = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$, are loc pentru orice valoare a lui ℓ. ■

Exemplul 7.3.1 *Seria geometrică* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n$ *este convergentă în discul deschis de rază* 1 *cu centrul în* z_0 *şi are suma* $f(z) = \dfrac{1}{1-(z-z_0)}$.

Soluţie. Într-adevăr, ţinând că în această serie de puteri $c_n = 1$ şi aplicând formula Cauchy–Hadamard, găsim $R = 1$ şi deci seria geometrică dată este convergentă în discul $B(z_0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : \; |z - z_0| < 1\}$ şi are suma funcţia analitică $f(z)$. Pentru a determina această funcţie, aplicăm definiţia sumei unei serii de funcţii ca limită a şirului sumelor parţiale:

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(z-z_0)^n = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-(z-z_0)^n}{1-(z-z_0)} = \frac{1}{1-(z-z_0)}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

S–a folosit atât avantajul calculului sumei primelor $n+1$ termeni ai unei progresii geometrice în complex, aceeaşi ca în real, cât şi posibilitatea trecerii la limită la numărătorul unei fracţii al cărui numitor este nenul.

Din (7.30) rezultă că suma unei progresii geometrice de numere complexe cu raţia în modul subunitară conţinând o infinitate de termeni se determină ca în real. ■

Observaţia 7.3.1 *Studiul seriilor de puteri se poate efectua direct pe seria centrată în origine*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \tag{7.31}$$

Trecerea de la (7.31) *la cazul general* (7.22) *se face cu substituţia* $z = \zeta - z_0$, *deci printr–o translaţie.*

Teorema 7.3.2 *Fie* R *raza de convergenţă a seriei de puteri* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$. *Dacă există în* $\overline{\mathbb{R}}$ *limita*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \ell_1, \tag{7.32}$$

atunci raza de convergenţă este de $R = \ell_1$.

Demonstraţie. Asociem seriei de puteri (7.31) seria numerică cu termeni pozitivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n, \tag{7.33}$$

cu $r > 0$ şi notăm cu A mulţimea valorilor lui r pentru care această serie este convergentă. Atunci, marginea superioară a mulţimi A, pe intervalul $[0, \infty]$, este tocmai raza de convergenţă R a seriei de puteri (7.31). Conform criteriului raportului al lui D'Alembert, seria (7.33) este convergentă dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}| r^{n+1}}{|c_n| r^n} < 1. \tag{7.34}$$

Din (7.34) rezultă $r\dfrac{1}{\ell_1} < 1$ şi deci $r < \ell_1$. Evident, marginea superioară a numerelor r cu proprietatea de mai sus este ℓ_1 şi deci raza de convergenţă este $R = \ell_1$. ∎

Exerciţiul 7.3.1 *Să se determine razele de convergenţă ale seriilor de puteri:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n!\, z^n.$$

Soluţie. Pentru primele două serii se foloseşte faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ şi deci $\ell = 1$, iar din formula Cauchy–Hadamard deducem că raza de convergenţă este $R = 1$ pentru ambele serii.

Pentru a treia serie aplicăm Teorema 7.3.2 şi găsim $R = \infty$.

Pentru ultima serie se deduce că $R = 0$. ∎

Exerciţiul 7.3.2 *Să se afle mulţimea de convergenţă a seriilor de puteri:*

$$\mathbf{1}^0.\ \sum_{n=0}^{\infty} (\cos in) z^n; \quad \mathbf{2}^0.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}; \quad \mathbf{3}^0.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z-1+i)^n}{(3n-2)2^n}.$$

Soluţie. Determinăm mai întâi numerele nenegative R_1, R_2, R_3, razele de convergenţă ale respectiv celor trei serii de puteri.

Aplicând, după caz, una din formulele de calcul a razei de convergenţă (7.29) şi (7.32), găsim:

$$R_1 = \frac{1}{e}; \quad R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad R_3 = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Atunci, discurile de convergenţă ale celor trei serii de puteri sunt respectiv

$$\begin{aligned} B_1\Big(0, \frac{1}{e}\Big) &= \Big\{z \in \mathbb{C} : \ \ |z| < \frac{1}{e}\Big\}, \\ B_2\Big(2, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) &= \Big\{z \in \mathbb{C} : \ \ |z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}, \\ B_3\Big(1-i, \frac{\sqrt{2}}{3}\Big) &= \Big\{z \in \mathbb{C} : \ \ |z-(1-i)| < \frac{\sqrt{2}}{3}\Big\}. \end{aligned}$$

Cel de al treilea disc de convergenţă are centrul în punctul $z_0 = 1 - i$ şi raza $R_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. ■

Exerciţiul 7.3.3 *Pentru următoarele patru serii de puteri, să se determine respectivele funcţii sumă* $f_1(z), \ldots, f_4(z)$ *pe mulţimile lor de convergenţă:*

$$(i)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n; \quad (ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad (iii)\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2}; \quad (iv)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2n+1}.$$

Soluţie. Seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ este seria geometrică cu primul termen 1 şi raţia z. Conform Exemplului 7.3.1 suma seriei este funcţia $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ ce este olomorfă în discul cu centrul în origine şi rază 1.

Pe discul de convergenţă se poate scrie egalitatea $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Aplicând teorema de derivabilitate termen cu termen a unei serii de puteri, pe acelaşi disc are loc egalitatea

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1}.$$

Înmulţind în ambii membri cu z se obţine

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \quad z \in B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : \ \ |z| < 1\}.$$

Prima serie poate fi integrată termen cu termen pe orice curbă netedă pe porţiuni inclusă în discul de rază 1 şi centrul în origine. Presupunând că această curbă are originea în $z = 0$ şi extremitatea într–un punct oarecare z cu $|z| < 1$, obţinem

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \zeta^n\, d\zeta \Longrightarrow \int_0^z \frac{d\zeta}{1-\zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Însă, o primitivă a funcţiei $\dfrac{1}{1-\zeta}$ este $-\mathrm{Log}\,(1-\zeta)$, unde pentru funcţia logaritm am luat determinarea fundamentală (principală) şi deci funcţia $f_2(z) = -\mathrm{Log}\,(1-z)$.

Funcţia $f_3(z)$ este suma seriei de puteri obţinută prin derivarea de două ori a seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Prin urmare,

$$f_3(z) = \frac{2}{(1-z)^3}.$$

Din $f_4(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n}}{2n+1}$ deducem $zf_4(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}$, iar prin derivare obţinem

$$(zf_4(z))' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Integrând egalitatea

$$(\zeta f_4(\zeta))' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \zeta^{2n} = \frac{1}{1+\zeta^2}$$

pe o curbă netedă ce are ca extremităţi originea şi un punct arbitrar z, deducem $zf_4(z) = \mathrm{arctg}\, z$, de unde $f_4(z) = \dfrac{\mathrm{arctg}\, z}{z}$. ∎

7.3.2 Serii Taylor

O serie de puteri defineşte în discul de convergenţă o funcţie analitică numită suma sa. Apare în mod natural următoarea problemă inversă: *dată o funcţie analitică pe un disc, putem asocia o serie de puteri convergentă în acel disc şi având ca sumă funcţia dată?* Teorema următoare răspunde acestei întrebări.

Teorema 7.3.3 (**Taylor**) *O funcţie complexă de variabilă complexă $f(z)$, analitică în discul $B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$, se poate reprezenta în mod unic prin seria de puteri*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad \textit{unde} \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad z \in B(z_0, R),$$

convergentă în discul $B(z_0, R)$.

Demonstraţie. Alegem un punct arbitrar z în discul $B(z_0, R)$ şi construim un cerc C_ρ de rază ρ cu centrul în z_0 care să –l conţină pe z, construcţie posibilă deoarece distanţa de la punctul z la frontiera discului este pozitivă.

Deoarece z este un punct în domeniul de contur C_ρ, din formula integrală a lui Cauchy rezultă că

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{7.35}$$

Să observăm că o parte a integrantului din (7.35) se poate scrie în forma

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^n}, \tag{7.36}$$

deci sub forma unei serii geometrice de raţie $q = \left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1.$

Pentru $\zeta \in C_\rho$, seria (7.36) este uniform convergentă fiind majorată de seria numerică

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}, \quad \text{cu} \quad |z - z_0| < \rho.$$

Folosind (7.36) în (7.35) şi integrând termen cu termen, obţinem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\Big)(z - z_0)^n. \tag{7.37}$$

Cu notaţia

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \tag{7.38}$$

egalitatea (7.37) devine o serie de puteri, convergentă în punctul z considerat.

Prin urmare, putem scrie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{7.39}$$

În baza teoremei lui Cauchy, în formula (7.38), cercul C_ρ se poate înlocui cu orice contur situat în domeniul $|z - z_0| < R$ care să conţină în interior punctul z_0.

Deoarece z este arbitrar, rezultă că seria (7.39) este convergentă în discul $|z - z_0| < R$, uniform convergentă pe discul închis $|z - z_0| \le \rho < R$ şi are suma $f(z)$ pe domeniul de convergenţă.

Prin urmare, funcţia $f(z)$ poate fi dezvoltată într–o serie de puteri centrată în z_0, serie care este convergentă pe un disc cu centrul în z_0 şi rază R. Suma acestei serii de puteri este funcţia $f(z)$.

În baza formulei (6.47), coeficienţii (7.38) ai dezvoltării sunt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{7.40}$$

Rămâne să demonstrăm unicitatea dezvoltării (7.39). Presupunem că avem şi dezvoltarea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z - z_0)^n \tag{7.41}$$

unde cel puţin un coeficient $c'_n \neq c_n$. Seria de puteri (7.41) este convergentă în discul $|z - z_0| < R$ şi, în baza formulei (7.25), coeficienţii acesteia sunt $c'_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. De aici şi din (7.40) rezultă $c_n = c'_n$. Aceasta demonstrează unicitatea dezvoltării (7.39). ■

Această teoremă stabileşte o corespondenţă biunivocă între o funcţie analitică într–o vecinătate a unui punct z_0 şi o serie de puteri centrată în acest punct. Aceasta înseamnă că noţiunea de funcţie analitică ca funcţie infinit derivabilă este echivalentă cu o funcţie ce poate fi reprezentată în forma sumei unei serii de puteri.

Să observăm că dacă funcţia $f(z)$ este analitică în domeniul D şi $z_0 \in D$, atunci raza de convergenţă a seriei Taylor $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ a acestei funcţii este cel mult egală cu distanţa de la punctul z_0 la frontiera domeniului D.

Definiţia 7.3.1 *Dezvoltarea unei funcţii analitice, în discul* $|z - z_0| < R$, *în seria de puteri* (7.39) *se numeşte* **dezvoltarea Taylor** *în jurul punctului* z_0, *iar seria* (7.39) *se numeşte* **seria Taylor** *a funcţiei* $f(z)$.

Exerciţiul 7.3.4 *Să se dezvolte în serie Taylor funcţia*

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

în vecinătatea originii şi în vecinătatea punctului $z_0 = 1$.

Soluţie. Această funcţie este analitică în tot planul complex cu excepţia punctelor $z_{1,2} = \pm i$ care sunt poli simpli ai funcţiei.

În baza Teoremei lui Taylor, funcţia $f(z)$ poate fi dezvoltată în serie Taylor în orice disc al planului complex care nu conţine polii $z_1 = +i$ şi $z_2 = -i$.

Dacă dorim să determinăm dezvoltarea funcţiei $f(z)$ în serie Taylor în vecinătatea originii atunci, această dezvoltare trebuie căutată în discul $|z| < 1$, deoarece pe această mulţime $f(z)$ este funcţie analitică.

În acest disc, funcţia $f(z)$ poate fi privită ca suma unei progresii geometrice cu raţia $-z^2$, subunitară în modul, deci putem scrie

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}. \tag{7.42}$$

Raza de convergenţă a seriei (7.42) este $R = 1$ şi reprezintă distanţa de la centrul discului la frontiera domeniului în care funcţia $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ este analitică.

Raza maximă a unui disc cu centrul în $z_0 = 1$ în care funcţia $f(z)$ este analitică este $\sqrt{2}$ şi prin urmare trebuie să determinăm dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei date în discul $|z-1| < \sqrt{2}$.

Pentru aceasta ţinem cont că funcţia $f(z)$ se descompune în fracţii simple în complex astfel

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\Big)$$

Folosind formula de calcul a derivatei de ordin n a funcţiei raţionale $\dfrac{1}{z-a}$ şi înlocuind în (7.40), găsim că în discul $|z-1| < \sqrt{2}$ are loc dezvoltarea

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{(1-i)^{n+1}} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}\Big)(z-1)^n. \tag{7.43}$$

Cu formele exponenţiale ale lui $1-i$ şi $1+i$, adică $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ şi $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, (7.43) se scrie

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin{(n+1)\dfrac{\pi}{4}}}{2^{\frac{n+1}{2}}}(z-1)^n. \tag{7.44}$$

Raza de convergenţă a seriei obţinute este $R = \sqrt{2}$ şi poate fi determinată şi folosind formula Cauchy–Hadamard. ■

Exemplul 7.3.2 *Dezvoltarea în serie Taylor într–o vecinătate a punctului $z = 1$ a funcţiei complexe $Log\, z$, analitică în discul $|z - 1| < 1$, este*

$$Log\, z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \tag{7.45}$$

raza de convergenţă a seriei fiind 1.

Soluţie. Într-adevăr, dacă se calculează coeficienţii, se găseşte

$$c_n = \frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{z^n}\Big|_{z=1} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

şi $c_0 = \text{Log}\, 1 = 0,\ c_1 = \frac{1}{z}\Big|_{z=1} = 1.$ ■

Exemplul 7.3.3 *Funcţia exponenţială $f(z) = e^z$ este analitică pe $\mathbb{C}$, deci se poate dezvolta în serie Taylor pe orice disc de centru z_0 şi rază oricât de mare. Derivatele funcţiei $f(z) = e^z$ în z_0 fiind $f^{(n)}(z_0) = e^{z_0}$, rezultă că seria Taylor în jurul punctului z_0 a funcţiei exponenţiale este*

$$e^z = e^{z_0}\Big(1 + \frac{z - z_0}{1!} + \frac{(z - z_0)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} + \cdots\Big), \ (\forall)\ z \in \mathbb{C}.$$

În particular, pentru $z_0 = 0$,

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C}.$$

Exemplul 7.3.4 *În orice vecinătate a originii au loc dezvoltările:*

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad (\forall)\ z \in \mathbb{C}.$$

Exerciţiul 7.3.5 *Să se arate că are loc egalitatea*

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2tz + z^2} = T_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) z^n, \tag{7.46}$$

unde $|t| < 1$ şi $T_n(t) = \cos(n\, arc\, cos\, t)$.

Soluţie. În fracţia din membrul întâi a relaţiei (7.46) punem $t = \cos\theta$ şi apoi o descompunem în fracţii simple. Obţinem

$$\frac{1-z^2}{1-2z\cos\theta+z^2} = -1 + \frac{1}{1-z\,e^{-i\theta}} + \frac{1}{1-z\,e^{i\theta}}.$$

În locul fracţiilor din membrul doi scriem (pentru θ fixat şi $|z| < 1$) seriile geometrice după puterile lui z.

Avem
$$\frac{1-z^2}{1-2z\cos\theta+z^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n \cos n\theta. \tag{7.47}$$

Comparând (7.46) cu (7.47) rezultă $T_n(t) = \cos n\theta = \cos(n \arccos t)$. ■

Observaţia 7.3.2 *Pornind de la identitatea evidentă*

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos(n-1)\theta \cdot \cos\theta$$

se poate arăta că are loc relaţia de recurenţă

$$T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t) \tag{7.48}$$

pe care o verifică funcţiile $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$. Folosind apoi un raţionament prin inducţie completă se arată că funcţia $T_n(t)$ este polinomul de gradul n

$$T_n(t) = 2^{n-1}t^n + a_1 t^{n-2} + a_2 t^{n-4} + \cdots, \tag{7.49}$$

numit **polinomul lui Cebâşev de speţa întâi**.

Polinoamele Cebâşev având gradele de la 1 până la 4 sunt

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \cos(\arccos t) = 2^0 t,\\ T_2(t) &= \cos(2\arccos t) = 2\cos^2\cos(\arccos t) - 1 = 2t^2 - 1,\\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t,\\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1. \end{aligned}$$

De altfel, se poate arăta că $T_n(t)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale ordinare de ordinul doi cu coeficienţi variabili

$$(1-t^2)T_n'' - tT_n' + n^2 T_n = 0.$$

Capitolul 8

Serii Laurent

În acest capitol se va studia comportarea unei funcţii analitice univalente în vecinătatea punctelor singulare izolate. Cunoaşterea acestei comportări permite o aprofundare a naturii funcţiilor analitice.

În capitolul precedent am pus în evidenţă rolul pe care îl au seriile de puteri, în particular seriile Taylor, în studiul funcţiilor analitice într–un domeniu unde nu există puncte singulare ale funcţiilor.

Un rol asemănător îl au şi seriile Laurent.

8.1 Domeniul de convergenţă al seriei Laurent

Definiţia 8.1.1 *Se numeşte* **serie Laurent centrată în** z_0 *o serie de forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{8.1}$$

unde z_0 *este un punct fixat din planul complex,* c_n *sunt numere complexe, iar sumarea se face după toate valorile întregi ale indicelui* n.

Pentru a determina domeniul de convergenţă al seriei (8.1), o aranjăm în forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}. \tag{8.2}$$

Domeniul de convergenţă al seriei (8.1) va fi intersecţia domeniilor de convergenţă ale seriilor de funcţii din membrul doi al egalităţii (8.2), care se numesc respectiv *partea tayloriană* sau *partea regulată* şi *partea principală* ale seriei Laurent.

Denumirea de serie dată expresiei (8.1) se justifică dacă analizăm membrul al doilea din (8.2) unde avem o sumă de două serii de funcţii, prima fiind o serie de puteri de tipul celor studiate în capitolul precedent.

Domeniul de convergenţă al seriei Taylor din (8.2) este discul deschis $B(z_0, R_1)$ de rază $R_1 \in [0, +\infty]$ şi centrul în punctul z_0, iar dacă $f_1(z)$ este suma acesteia atunci, pe discul de convergenţă, are loc

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, R_1) \iff |z - z_0| < R_1. \tag{8.3}$$

Pentru a determina domeniul de convergenţă al seriei de funcţii care reprezintă partea principală a seriei Laurent, efectuăm schimbarea de variabilă $\zeta = \dfrac{1}{z - z_0}$.

Această serie va deveni serie de puteri centrată în originea planului complex (ζ) deci o serie de forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$.

Dacă $1/R_2$ este raza de convergenţă a acestei serii de puteri şi $\varphi(\zeta)$ suma sa pe discul de convergenţă

$$B\Big(0, \frac{1}{R_2}\Big) = \Big\{\zeta : \ |\zeta| < \frac{1}{R_2}\Big\},$$

atunci putem scrie

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n, \quad |\zeta| < \frac{1}{R_2}. \tag{8.4}$$

Revenind la variabila iniţială z şi punând $\varphi(\zeta(z)) = f_2(z)$, obţinem

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \quad |z - z_0| > R_2. \tag{8.5}$$

Prin urmare, domeniul de convergenţă al seriei de funcţii care reprezintă partea principală a seriei Laurent (8.1) este exteriorul cercului $|z-z_0| = R_2$, unde $R_2 \in [0, \infty]$.

Astfel, seria Laurent (8.1) este convergentă pe domeniul obţinut prin intersecţia domeniilor de convergenţă ale seriilor din membrul doi al relaţiei (8.2) şi suma sa va fi o funcţie analitică pe acest domeniu.

Dacă $R_2 < R_1$, intersecţia domeniilor de convergenţă ale celor două serii este *coroana circulară* $R_2 < |z - z_0| < R_1$ şi seria Laurent (8.1) are suma

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad R_2 < |z - z_0| < R_1. \tag{8.6}$$

Deoarece seriile (8.3) şi (8.4) sunt serii de puteri, rezultă că în domeniul de convergenţă al seriei Laurent funcţia sumă $f(z)$ are proprietăţile sumei seriilor de puteri.

În concluzie, *seria Laurent* (8.1) *este convergentă în coroana circulară* $R_2 < |z - z_0| < R_1$ *şi suma sa* $f(z)$ *este o funcţie analitică în această coroană.*

8.2 Dezvoltarea unei funcţii analitice într–o serie Laurent

Să cercetăm dacă este posibil să asociem unei funcţii analitice într–o coroană circulară o serie Laurent convergentă în această coroană şi care să aibă drept sumă funcţia dată.

În acest sens, de ajutor este teorema următoare.

Teorema 8.2.1 *Funcţia* $f(z)$*, analitică în coroana circulară* $R_2 < |z-z_0| < R_1$*, se reprezentă în mod unic în coroană printr–o serie Laurent convergentă în acea coroană.*

Demonstraţie. Fixăm un punct arbitrar z în coroana circulară $R_2 < |z - z_0| < R_1$ şi construim cercurile concentrice $C_{R'_1}$ şi $C_{R'_2}$ cu centrul în z_0 şi raze care satisfac condiţiile

$$R_2 < R'_2 < R'_1 < R_1, \quad R'_2 < |z - z_0| < R'_1.$$

Conform formulei integrale a lui Cauchy pentru un domeniu multiplu conex, avem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-_{R'_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta. \tag{8.7}$$

La fel ca în cazul seriei Taylor, observăm că

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\Big)^n.$$

Observând că pe cercul $C_{R'_1}$ are loc inegalitatea $\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \le q < 1$ şi folosind integrarea termen cu termen într–o serie de puteri, rezultă

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{8.8}$$

unde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n \geq 0. \tag{8.9}$$

Deoarece pe cercul $C_{R'_2}$ are loc inegalitatea $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$, iar

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^n,$$

din aceleaşi considerente ca mai sus, obţinem

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-_{R'_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, \tag{8.10}$$

unde

$$c_{-n} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C^-_{R'_2}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta. \tag{8.11}$$

Schimbând orientarea curbei de integrare în (8.11), găsim o altă expimare pentru c_{-n}, şi anume

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R'_2}} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta. \tag{8.12}$$

Să observăm că funcţiile de integrat din (8.9) şi (8.12) sunt funcţii analitice în coroana circulară $R_2 < |z - z_0| < R_1$.

În baza Teoremei lui Cauchy, valorile integralelor din formulele (8.9) şi (8.12) nu se schimbă la o deformare a contururilor de integrare în domeniu de analiticitate ale funcţiilor de integrat.

Această observaţie permite combinarea formulelor (8.9) şi (8.12) într–o singură expresie

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n = 0, \quad n = \pm 1, \quad n = \pm 2, \quad \cdots, \tag{8.13}$$

unde C este un contur arbitrar închis situat în coroana circulară $R_2 < |z - z_0| < R_1$.

Revenind la (8.7), obţinem

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{8.14}$$

unde coeficienţii c_n se determină prin formula unitară (8.13).

Deoarece z este un punct arbitrar în coroana circulară $R_2 < |z-z_0| < R_1$, rezultă că seria (8.14) este convergentă şi are suma $f(z)$ în această coroană, iar în orice coroană închisă, concentrică şi inclusă în coroana $R_2 < R_2' \leq |z-z_0| \leq R_1' < R_1$, seria (8.14) este uniform convergentă şi are suma $f(z)$.

Rămâne să demonstrăm unicitatea dezvoltării (8.14).

Presupunem că mai avem şi o altă dezvoltare

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z-z_0)^n$$

unde cel puţin unul din coeficienţi $c_n' \neq c_n$. Atunci, oriunde în interiorul coroanei $R_2 < |z-z_0| < R_1$, avem egalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n'(z-z_0)^n. \tag{8.15}$$

Să considerăm un disc $B(z_0, R)$, de rază R, cu $R_2 < R < R_1$, cu centrul în z_0. Seriile de funcţii din (8.15) sunt uniform convergente pe discul $B(z_0, R)$.

Înmulţim ambii membri ai lui (8.15) cu $(z-z_0)^{-m-1}$, unde m este un întreg fixat pentru care $c_m \neq c_m'$ şi integrăm apoi termen cu termen.

Vom întâlni termeni care conţin integrale de forma $\displaystyle\int_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1}\, dz$.

Având în vedere că pe C_R avem că $z - z_0 = R\, e^{i\varphi}$, unde $\varphi \in [0, 2\pi]$, obţinem

$$\int_{C_R} (z-z_0)^{n-m-1}\, dz = i\, R^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi} d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi i, & n = m. \end{cases} \tag{8.16}$$

Luând în consideraţie (8.16), după efectuarea integrării egalităţii (8.15), găsim că seriile numerice care apar în cei doi membri au fiecare doar câte un termen diferit de zero, şi anume c_m, respectiv c_m'.

Aşadar, $c_m = c_m'$.

Cum numărul întreg m l-am ales arbitrar, rezultă că $c_n = c_n'$ pentru toţi întregii n, ceea ce dovedeşte unicitatea dezvoltării (8.14). ■

Exerciţiul 8.2.1 *Fie funcţia* $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-1)^3}$ *care, în planul complex la distanţă finită, are singularităţile* -1 *şi* 1, *primul pol simplu, iar al doilea pol triplu. Se cer dezvoltările în serie Laurent*

a) *în jurul punctului* $z_0 = 1$;

b) *în exteriorul discului închis* $\overline{B}(1, 2) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-1| \leq 2\}$.

Soluţie. *a*) Izolăm punctul $z_0 = 1$ cu un cerc Γ_1 cu centrul în $z_0 = 1$ şi cu raza R_1, unde $0 < R_1 < 2$.

Acest cerc, împreună cu cercul Γ_2 cu acelaşi centru şi cu raza R_2, ales aşa fel încât $R_1 < R_2 < 2$, determină o coroană circulară care, împreună cu frontiera sa $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, este inclusă în domeniul de olomorfie al funcţiei f.

Izolăm factorul care dă singularitatea lui f, punând

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot g(z), \quad \text{unde} \quad g(z) = \frac{z}{z+1}$$

şi dezvoltăm în serie Taylor funcţia $g(z)$ în jurul punctului $z_0 = 1$. Avem

$$g(z) = \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{2 + (z-1)} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{z-1}{2}}.$$

În ipoteza că $\left|\dfrac{z-1}{2}\right| < 1$, ultima fracţie este suma unei serii geometrice cu raţia subunitară $q = -\dfrac{z-1}{2}$, serie care este convergentă pe discul deschis $|z-1| < 2$, deci putem scrie egalitatea

$$\frac{1}{1 + \dfrac{z-1}{2}} = 1 - \frac{z-1}{2} + \frac{(z-1)^2}{2^2} - \cdots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n} + \cdots$$

Folosind această egalitate, exprimarea lui $g(z)$ devine

$$g(z) = 1 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n}$$

care, înlocuită în $f(z)$ conduce la dezvoltarea în serie Laurent a acestei funcţii în coroana circulară $0 < |z-1| < 2$,

$$\begin{aligned} f(z) \quad &= \quad \frac{1}{2} \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{2^3} \frac{1}{(z-1)} + \\ &+ \quad \frac{1}{2^4} - \frac{z-1}{2^5} + \cdots + (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+4}} + \cdots \end{aligned}$$

Partea principală a dezvoltării conţine un număr finit de termeni. Cel mai mic exponent este -3, iar 3 este ordinul polului în jurul căruia s–a făcut dezvoltarea în serie Laurent.

b) Coroana circulară va avea centrul tot în $z_0 = 1$, raza $R_2 > 2$, iar $R_1 > R_2$ poate fi oricât de mare.

Coroana circulară, împreună cu frontiera sa $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, este inclusă în domeniul de analiticitate al funcţiei f.

Cu notaţiile de mai sus,

$$g(z) = \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{2+(z-1)} = 1 - \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{2}{z-1}}.$$

Pentru $|z-1| > 2$, urmează $\left|\dfrac{2}{z-1}\right| < 1$ şi ultima fracţie din expresia funcţiei $g(z)$ este suma unei serii geometrice cu raţia $q = -\dfrac{2}{z-1}$. Deci,

$$g(z) = 1 - \frac{1}{z-1}\Big(1 - \frac{2}{z-1} + \frac{2^2}{(z-1)^2} - \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{(z-1)^n} + \cdots\Big).$$

În acest mod, se obţine dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^3} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{2}{(z-1)^5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^n}{(z-1)^{n+4}} + \cdots$$

pentru orice număr complex z care satisfac condiţia $|z-1| > 2$.

Partea principală a seriei Laurent în coroana infinită $|z-1| > 2$ are o infinitate de termeni, iar partea Tayloriană nu există. ■

Exerciţiul 8.2.2 *Să se dezvolte în serie Laurent funcţia*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

în următoarele coroane circulare:

$$(K_1):\quad 0 < |z| < 1; \qquad (K_2):\quad 1 < |z| < 2; \qquad (K_3):\quad 2 < |z| < \infty.$$

Soluţie. Funcţia $f(z)$ este analitică în întreg planul complex cu excepţia punctelor $z = 0$, $z = 1$ şi $z = 2$ care sunt poli simpli. Fiind o funcţie raţională, funcţia $f(z)$ admite descompunerea în fracţii simple

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-2}. \tag{8.17}$$

În fiecare din coroanele de mai sus funcţia considerată este dezvoltabilă în serie Laurent după puterile întregi ale lui z.

Să remarcăm că în orice coroană ne-am plasa cu punctul z, primul termen este deja o funcţie dezvoltată în serie de puteri ale lui z, din toţi termenii seriei rămânând doar cel cu coeficientul $c_{-1} = \dfrac{1}{2}$.

Considerând că ne aflăm în coroana K_1, al doilea termen al descompunerii în fracţii simple a funcţiei $f(z)$ este suma unei serii geometrice cu raţia z

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Cel de al doilea factor din termenul al treilea al descompunerii în fracţii simple a funcţiei $f(z)$ este de asemeni suma unei serii de puteri, şi anume

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

Sumând cele două serii, înmulţite în prealabil cu factorii ce se impun, obţinem dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ în coroana circulară K_1

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(1 - \frac{1}{2^{n+2}}\Big) z^n.$$

Pentru dezvoltarea în serie Laurent în coroana K_2 vom folosi din nou descompunerea (8.17), pe care o vom scrie în forma

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}. \tag{8.18}$$

Deoarece în coroana circulară K_2, $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$ şi $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$, factorii secunzi din termenii al doilea şi al treilea ai descompunerii (8.18) sunt sumele unor progresii geometrice convergente cu raţiile $q = \dfrac{1}{z}$ şi respectiv $q = \dfrac{z}{2}$.

După reducerea termenilor asemenea, seria Laurent a funcţiei $f(z)$ în coroana K_2 se scrie în forma

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+2}}.$$

Într–o manieră similară, luând în consideraţie că $|z| > 2$, se constată că în coroana K_3 dezvoltarea Laurent nu conţine decât puteri negative ale lui

z. Pentru a ajunge la această dezvoltare, scriem

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}; \qquad \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Folosind aceste dezvoltări, constatăm că seria Laurent a funcţiei $f(z)$ în coroana K_3 este

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\Big(2^{n-1}-1\Big)\frac{1}{z^{n+1}}.$$

■

Exerciţiul 8.2.3 *Să se deducă dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ de la Exerciţiul 8.2.2 după puterile lui $z-1$.*

Indicaţie. Funcţia $f(z)$ este analitică în coroana circulară cu centrul în $z_0 = 1$, raza interioară $R_2 = \varepsilon$ şi raza exterioară $R_1 = 1$. Prin urmare, se poate deduce seria Laurent a funcţiei $f(z)$ după puterile lui $z-1$. ■

Exerciţiul 8.2.4 *Fie funcţia $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$. Să se dezvolte această funcţie în serie Laurent:*

1. *în discul $|z| < 1$;*
2. *în coroana circulară $1 < |z| < 2$;*
3. *în jurul punctului de la infinit.*

Soluţie. Avem $f(z) = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{z-2}$, unde $A = -1$ şi $B = 1$.
1. În discul $|z| < 1$, funcţia $f(z)$ este suma seriei de puteri

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(1-\frac{1}{2^{n+1}}\Big)z^n,$$

Se observă că pe acest disc dezvoltarea funcţiei este tayloriană deoarece $f(z)$ este funcţie analitică în discul $|z| < 1$.
2. Sunt evidente egalităţile

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}.$$

Prima serie fiind convergentă pentru $|z| < 2$, iar a doua pentru $|z| > 1$, rezultă că dezvoltarea în serie Laurent are loc în coroana circulară $1 < |z| < 2$.

3. $f(z) = \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{z}} - \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{z^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n-1} - 1)\dfrac{1}{z^n}.$

Dezvoltarea determinată este în jurul punctului de la infinit deoarece $|z| > 2$. ∎

8.3 Clasificarea punctelor singulare izolate

Definiţia 8.3.1 *Un punct singular al funcţiei $f(z)$ care nu este pol se numeşte* **punct singular esenţial**.

Definiţia 8.3.2 *Un punct singular z_0 este* **punct singular izolat** *al funcţiei $f(z)$ dacă $f(z)$ este o funcţie univalentă şi analitică în coroana circulară $0 < |z - z_0| < R_1$.*

Reamintim că polii unei funcţii sunt puncte singulare izolate. Deci, dacă o singularitate izolată z_0 nu este pol, atunci z_0 este un *punct singular esenţial izolat*. Dacă z_0 este o singularitate neizolată, atunci z_0 este un *punct singular esenţial neizolat*.

Admitem situaţia în care funcţia $f(z)$ nu este definită în punctul z_0 şi studiem comportarea lui $f(z)$ în vecinătatea lui z_0. În baza celor prezentate în paragraful precedent, într–o vecinătate a lui z_0 funcţia $f(z)$ poate fi dezvoltată într–o serie Laurent de forma (8.14), convergentă în coroana circulară $0 < |z - z_0| < R_1$.

Sunt posibile următoarele trei cazuri:

(1) Seria Laurent rezultată nu are parte principală, prin urmare nu conţine termeni cu puteri negative ale lui $(z - z_0)$;

(2) Seria Laurent conţine un număr finit de termeni în partea principală;

(3) Seria Laurent conţine un număr infinit de termeni în partea principală.

În cazul (1), seria Laurent a funcţiei $f(z)$ este $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

În acest caz funcţia $f(z)$ are limită în z_0 şi anume $\lim_{z \to z_0} f(z) = c_0$.

Dacă f nu a fost definită în z_0, atunci se prelungeşte funcţia prin continuitate adăugând $f(z_0) = c_0$.

Dacă se întâmplă ca valoarea lui f să fi fost specificată în z_0, dar să nu coincidă cu c_0, modificăm valoarea funcţiei în z_0 punând $f(z_0) = c_0$.

Funcţia $f(z)$ astfel definită va fi analitică pe discul $|z - z_0| < R_1$. Astfel s–a înlăturat discontinuitatea funcţiei f în punctul z_0.

Definiţia 8.3.3 *O singularitate izolată z_0 a lui $f(z)$ pentru care dezvoltarea Laurent în jurul punctului z_0 nu conţine termeni cu puteri negative ale lui $(z - z_0)$ se numeşte* **singularitate removabilă**.

Raţionamentul de mai sus, la care adăugăm ultima definiţie, a demonstrat

Teorema 8.3.1 *Dacă z_0 este o singularitate removabilă a unei funcţii analitice $f(z)$, atunci există o valoare limită $\lim_{z\to z_0} f(z) = c_0$, unde $|c_0| < \infty$.*

Observaţia 8.3.1 *În vecinătatea unei singularităţi removabile funcţia $f(z)$ este mărginită şi poate fi reprezentată în forma*

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad m \in I\!N, \quad \varphi(z_0) \neq 0. \tag{8.19}$$

Dacă în singularitatea removabilă limita funcţiei $f(z)$ este zero, atunci în reprezentarea (8.19) *$m \in I\!N^*$ şi m determină ordinul lui z_0 ca zerou al funcţiei $f(z)$.*

Are loc şi afirmaţia inversă celei din Teorema 8.3.1. Prin urmare putem formula

Teorema 8.3.2 *Dacă o funcţie $f(z)$, analitică în coroana circulară $0 < |z - z_0| < R_1$, este mărginită, deci există $M > 0$ astfel încât*

$$|f(z)| < M, \quad \textit{pentru} \quad 0 < |z - z_0| < R_1,$$

atunci punctul z_0 este o singularitate removabilă a lui $f(z)$.

Demonstraţie. Dezvoltăm funcţia $f(z)$ în seria Laurent (8.14) şi considereăm expresia (8.13) pentru coeficienţii seriei, adică

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Să luăm drept contur de integrare cercul C de ecuaţie $|\zeta - z_0| = \rho$. Atunci, din ipotezele teoremei rezultă

$$|c_n| < M\rho^{-n}. \tag{8.20}$$

Vom considera coeficienţii c_{-n}. Deoarece valoarea coeficienţilor c_{-n} nu depinde de ρ, din (8.20) obţinem $c_{-n} = 0$ pentru $n < 0$, ceea ce demonstrează teorema. ■

Cazul (2) în care se poate plasa o dezvoltare Laurent a unei funcţii $f(z)$ în vecinătatea punctului z_0 este analizat în teorema următoare.

Teorema 8.3.3 *O funcţie f are în punctul z_0 un pol de ordin p dacă şi numai dacă dezvoltarea în serie Laurent sa în jurul lui z_0 are forma*

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-z_0)^p} + \frac{c_{-p+1}}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{8.21}$$

cu coeficientul $c_{-p} \neq 0$.

Demonstraţie. Dacă funcţia $f(z)$ are dezvoltarea din enunţ pentru $0 < |z - z_0| < R_1$, funcţia φ definită prin

$$\varphi(z) = c_{-p} + c_{-p+1}(z-z_0) + \cdots + c_0(z-z_0)^p + c_1(z-z_0)^{p+1} + \cdots$$

este analitică pe discul $|z - z_0| < R_1$ fiindcă pe acest disc $\varphi(z)$ se reprezintă ca o serie Taylor. Prin urmare, z_0 este punct ordinar pentru funcţia $\varphi(z)$ şi $\varphi(z_0) \neq 0$. Dar $\varphi(z) = (z - z_0)^p f(z)$. Conform definiţiei polului de ordin p al unei funcţii, rezultă că z_0 este pol de ordin p pentru funcţia $f(z)$.

Reciproc, dacă z_0 este un pol de ordin p al funcţiei $f : D \to \mathbb{C}$, există o funcţie $\varphi : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ care are în z_0 un punct ordinar şi $\varphi(z_0) \neq 0$, astfel încât

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^p} \cdot \varphi(z), \quad (\forall)\ z \in D.$$

Dar funcţia φ admite o dezvoltare Taylor în jurul punctului z_0

$$\varphi(z) = \gamma_0 + \gamma_1(z-z_0) + \cdots + \gamma_n(z-z_0)^n + \cdots$$

cu $\gamma_0 = \varphi(z_0) \neq 0$, deci funcţia f admite o dezvoltare în serie Laurent de forma

$$f(z) = \frac{\gamma_0}{(z-z_0)^p} + \frac{\gamma_1}{(z-z_0)^{p-1}} + \cdots + \gamma_p + \gamma_{p+1}(z-z_0) + \cdots$$

cu $\gamma_0 \neq 0$. Teorema este demonstrată. ■

Să revenim asupra singularităţilor posibile ale unei funcţii, eliminând din discuţie punctele critice care pot exista doar pentru funcţii multiforme şi să analizăm punctele singulare esenţiale şi pe cele singulare esenţiale izolate.

Recunoaşterea unui punct singular esenţial izolat z_0 al funcţiei uniforme $f(z)$ se obţine când ne situăm în cazul (3) al dezvoltării în serie Laurent a funcţiei $f(z)$. Conform ultimei teoreme, z_0 este un punct singular esenţial al funcţiei $f(z)$ dacă şi numai dacă partea principală a dezvoltării conţine o infinitate de termeni.

Exemplul 8.3.1 *Funcţia* $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ *are în* $z_0 = 0$ *un punct singular esenţial izolat.*

Soluţie. Funcţia considerată admite următoarea dezvoltare Laurent în jurul punctului $z_0 = 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n} + \cdots.$$

Partea principală a acestei dezvoltări are o infinitate de termeni, deci $z_0 = 0$ este un punct singular care este şi izolat deoarece, cu excepţia lui z_0, toate punctele oricărei vecinătăţi a originii sunt puncte ordinare. ∎

Fie f o funcţie complexă de o variabilă complexă definită pe o mulţime deschisă D, cu valori în planul complex $(z) = \overline{\mathbb{C}}$. Asociem funcţiei f, funcţia φ cu valori în planul complex întreg şi definită pe mulţimea $D' = \Big\{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : \zeta = \dfrac{1}{z},\ z \in D\Big\}$ prin $\varphi(\zeta) = f\Big(\dfrac{1}{\zeta}\Big)$, unde $\zeta \in D'$.

Definiţia 8.3.4 *Vom spune că* $z = \infty$ *este* **punct ordinar** *al funcţiei* f *dacă* $\zeta = 0$ *este punct ordinar al funcţiei* φ. *Dacă* $\zeta = 0$ *este un punct singular al funcţiei* φ *vom spune că* $f(z)$ *are în punctul de la infinit un punct singular de aceeaşi natură.*

Observaţia 8.3.2 *Conform Definiţiei* 8.3.4 *şi a Exemplului* 8.3.1, *rezultă că funcţia exponenţială* $z \mapsto e^z$ *are în punctul de la infinit un punct singular esenţial izolat.*

De altfel, natura punctului de la infinit al unei funcţii $f(z)$ se poate stabili pornind de la dezvoltarea funcţiei în seria Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \tag{8.22}$$

convergentă în coroana circulară $R < |z| < \infty$.

Distingem următoarele cazuri:

(1) Punctul $z = \infty$ se numeşte *singularitate removabilă* a funcţiei $f(z)$ dacă dezvoltarea (8.22) nu are termeni cu puteri pozitive ale lui z, adică are forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n},$$

ceea ce este tot una cu a spune că există limita finită a funcţiei când $z \to \infty$. Această limită nu depinde de drumul pe care z se duce către infinit şi are valoarea c_0. Dacă

$$c_0 = c_{-1} = c_{-2} = \cdots = c_{-m+1} = 0, \quad c_{-m} \neq 0,$$

atunci punctul de la infinit este un zerou de ordin m al funcţiei $f(z)$.

(2) Punctul $z = \infty$ este un *pol de ordin* m al funcţiei $f(z)$ dacă dezvoltarea (8.22) conţine un număr de m termeni cu puteri pozitive ale lui z, adică,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{m} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_m z^m,$$

ceea ce este echivalent cu a spune că modulul valorilor funcţiei creşte nemărginit atunci când $z \to \infty$.

(3) Punctul $z = \infty$ se numeşte *singularitate esenţială* a funcţiei $f(z)$ dacă dezvoltarea (8.22) conţine o infinitate de termeni cu puteri pozitive ale lui z, sau dacă oricare număr complex w s–ar alege, găsim un şir de puncte în planul complex (z_n) cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$.

Exemplul 8.3.2 *Funcţia complexă de variabilă complexă*

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{C}}, \quad f(z) = \frac{1}{\sin \dfrac{1}{z}},$$

are în punctul $z_0 = 0$ *un punct singular esenţial neizolat.*

Soluţie. Într-adevăr, zerourile funcţiei $\zeta \mapsto \sin \zeta$ sunt zeroruri simple, deci $\zeta_k = k\pi$, unde $k \in \boldsymbol{Z}$, sunt poli simpli pentru funcţia $\zeta \mapsto \dfrac{1}{\sin \zeta}$. Funcţia f are poli simpli daţi de $\dfrac{1}{z_k} = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$, adică $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Observăm că $z_0 = 0$ este un punct de acumulare al mulţimii polilor (în orice vecinătate a acestui punct există cel puţin un pol al funcţiei f), deci $z_0 = 0$ este punct singular esenţial neizolat pentru funcţia f.

Definiţia 8.3.5 *Funcţia* $f : D \to \mathbb{C}$ *se numeşte* **funcţie meromorfă** *pe domeniul* $D \subset \mathbb{C}$ *dacă în acest domeniu* f *nu are alte singularităţi decât poli.*

De exemplu, funcţiile raţionale (în particular polinoamele) sunt funcţii meromorfe pe $\mathbb{C}$. Funcţiile $z \mapsto \operatorname{tg} z$, $z \mapsto \cot z$, $z \mapsto \tanh z$, $z \mapsto \coth z$ sunt meromorfe pe orice domeniu $D \subset \mathbb{C}$.

Următoarele proprietăţi ale funcţiilor meromorfe sunt evidente şi doar le enumerăm.

1) Dacă o funcţie f este meromorfă pe un domeniu D, mulţimea polilor săi conţinuţi în D nu poate avea un punct de acumulare în D. De aici rezultă că o funcţie meromorfă pe un domeniu mărginit D nu poate avea în D decât un număr finit de poli.

2) Dacă f este o funcţie meromorfă pe un domeniu D, atunci $f(z)$ admite o dezvoltare în serie de puteri centrată în orice punct $z_0 \in D$, de forma

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Dacă z_0 este un punct ordinar al funcţiei f, atunci $m \in \mathbb{N}$. Dacă z_0 este un pol de ordin p al funcţiei f, atunci $m = -p$ şi $c_{-p} \neq 0$.

3) Suma, produsul şi câtul a două funcţii meromorfe pe un domeniu D sunt funcţii meromorfe pe D.

Definiţia 8.3.6 *O funcţie complexă de o variabilă complexă se numeşte* **funcţie întreagă** *dacă este analitică în întreg planul complex* $\mathbb{C}$.

De exemplu: polinoamele, funcţia exponenţială, funcţiile circulare $z \mapsto \sin z$, $z \mapsto \cos z$, funcţiile hiperbolice $z \mapsto \operatorname{sh} z$, $z \mapsto \operatorname{ch} z$ sunt funcţii întregi.

Evident, seria Taylor a unei funcţii întregi, în jurul oricărui punct $z_0 \in \mathbb{C}$, are raza de convergenţă $R = \infty$.

În încheiere vom da două teoreme referitoare la comportarea unei funcţii întregi în punctul de la infinit.

Teorema 8.3.4 *O funcţie întreagă are în punctul de la infinit un punct singular esenţial izolat dacă şi numai dacă este diferită de un polinom.*

Demonstraţie. Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcţii întregi f,

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots,$$

are loc pentru $|z| < R$, cu R oricât de mare. Funcţia φ, cu valorile $\varphi(\zeta) = f\Big(\dfrac{1}{\zeta}\Big)$, are dezvoltarea în serie Laurent

$$\varphi(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \cdots$$

pentru $|\zeta| > \rho = \dfrac{1}{R}$, cu ρ arbitrar de mic, deci o dezvoltare în jurul lui $\zeta_0 = 0$. Punctul de la infinit este punct singular esenţial izolat al funcţiei f dacă şi numai dacă $\zeta_0 = 0$ este un punct singular esenţial izolat pentru funcţia φ. Însa, partea principală a dezvoltării în serie Laurent a funcţiei φ conţine o infinitate de termeni dacă şi numai dacă f nu este polinom. Teorema este demonstrată. ■

De exemplu, funcţiile $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \sin z$, $z \mapsto \cos z$, $z \mapsto \operatorname{sh} z$, $z \mapsto \operatorname{ch} z$ au în punctul de la infinit un punct singular esenţial izolat.

Teorema 8.3.5 *Dacă o funcţie întreagă $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ are în punctul de la infinit un punct ordinar, atunci f se reduce la o constantă.*

Demonstraţie. Dacă f are în punctul de la infinit un punct ordinar, funcţia φ, cu valorile $\varphi(\zeta) = f\Big(\dfrac{1}{\zeta}\Big)$, are în $\zeta_0 = 0$ un punct ordinar, deci seria Laurent

$$\varphi(\zeta) = c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \cdots + \frac{c_n}{\zeta^n} + \cdots$$

trebuie să aibă partea principală nulă. Rezultă $c_n = 0$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ şi rămâne $\varphi(\zeta) = c_0$, $(\forall)\ \zeta \in \overline{\mathbb{C}}$, deci $f(z) = c_0$, $(\forall)\ z \in \overline{\mathbb{C}}$. ■

Ca aplicaţie imediată a acestei teoreme se poate demonstra

Teorema 8.3.6 (**Teorema lui D'Alembert şi Gauss**) *Orice polinom P de grad $n \geq 1$ are cel puţin un zerou în mulţimea $\mathbb{C}$.*

Demonstraţie. Dacă $P(z) \neq 0$, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$, atunci funcţia f, cu valorile $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ este o funcţie întreagă, care, în punctul de la infinit are un punct ordinar, deci f, ca şi P, se reduc la câte o constantă. Acest lucru contrazice însă ipoteza. ■

Exerciţiul 8.3.1 *Să se determine seria Laurent corespunzătoare ramurii principale a funcţiei complexe de variabilă complexă $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ în coroana circulară $1 < |z| < \infty$.*

Soluţie. Funcţia $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ are două ramuri, iar ramura care este o continuare analitică directă a funcţiei reale $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, definită pentru $x > 1$, este ramura principală sau determinarea principală.

Această funcţie complexă are, în coroana circulară $1 < |z| < \infty$, numai puncte ordinare.

Să construim seria Laurent a acestei funcţii în jurul punctului $z = \infty$.

Pentru aceasta, punem $\zeta = \dfrac{1}{z}$ şi astfel coroana infinită de mai sus se transformă în discul de rază unitate şi centrul în $\zeta_0 = 0$, iar punctul $z = \infty$ trece în punctul $\zeta = 0$.

Dezvoltăm funcţia

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\zeta^2}}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}$$

într–o serie Taylor în vecinătatea punctului ordinar $\zeta_0 = 0$.

Să observăm că funcţia $\varphi(\zeta)$ este derivata funcţiei $\psi(\zeta) = \sqrt{1+\zeta^2}$. Alegerea ramurii funcţiei multiforme ψ este determinată de alegerea ramurii funcţiei $f(z)$ şi evident că este vorba de acea ramură a funcţiei pentru care $\psi(0) = +1$. Pentru simplificare, notăm $w = \zeta^2$ şi considerăm funcţia $\chi(w) = \sqrt{1+w}$.

Pentru dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei χ în vecinătatea lui $w = 0$ avem nevoie de valorile derivatelor $\chi^{(n)}(0)$.

Se găseşte

$$\chi^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}.$$

Astfel, dezvoltarea ramurii alese a funcţiei $\chi(\zeta)$ în discul $|w| < 1$ este

$$\chi(w) = \sqrt{1+w} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\cdot w^n.$$

În felul acesta, pentru funcţia $\psi(\zeta)$ şi pentru $|\zeta| < 1$, obţinem

$$\psi(\zeta) = \sqrt{1+\zeta^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\cdot \zeta^{2n},$$

iar pentru funcţia $\varphi(\zeta)$ se obţine

$$\varphi(\zeta) = \psi'(\zeta) = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot \zeta^{2n+1}.$$

În final, pentru ramura aleasă a funcţiei $f(z)$, în coroana nemărginită $1 < |z|$ obţinem dezvoltarea Laurent

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

Deci, punctul de la infinit este punct ordinar pentru funcţia f. ∎

Exerciţiul 8.3.2 *Se consideră funcţia*

$$f(z) = \frac{z(z^2+1) - 4(z^2-1)}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}.$$

Să se dezvolte în serie în jurul punctelor $z_0 = 0$, $z_0 = 1$, $z_0 = 2$, $z_0 = 3$.

Soluţie. Funcţia $f(z)$ admite punctele $z_0 = 1$, $z_0 = 2$, $z_0 = 3$ ca poli simpli şi se poate scrie:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{z}{z-2} - \frac{1}{z-3}.$$

În discul $|z| < 1$, funcţia f este analitică şi are dezvoltarea Taylor

$$f(z) = -\frac{2}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}}\Big)z^n.$$

Pentru a dezvolta funcţia în serie în jurul punctului $z = 1$ scriem funcţia $f(z)$ sub forma:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{z-1}{1-(z-1)} - \frac{1}{1-(z-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z-1}{2}}.$$

În discul $|z-1| < 1$, avem dezvoltările Taylor:

$$\frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n; \qquad \frac{1}{1-\dfrac{z-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$$

şi deci dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei f în coroana circulară $0 < |z-1| < 1$ are forma

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{2^{n+1}} - 2\Big)(z-1)^n.$$

Vom scrie acum expresia funcţiei $f(z)$ sub forma

$$f(z) = \frac{1}{1+(z-2)} + 1 + \frac{2}{z-2} + \frac{1}{1-(z-2)}.$$

Primul şi ultimul termen din această expresie sunt sume de serii geometrice convergente în discul $|z-2| < 1$, după cum urmează:

$$\frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n; \qquad \frac{1}{1-(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(z-2)^n.$$

Cu acestea, am determinat dezvoltarea Laurent a funcţiei $f(z)$ în coroana $0 < |z-2| < 1$

$$f(z) = \frac{2}{z-2} + 3 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^{2n}.$$

Pentru a obţine dezvoltarea în serie a funcţiei $f(z)$ în jurul punctului $z = 3$, vom scrie valorile acesteia în forma

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{z-3}{2}} + \frac{z-3}{1+(z-3)} + \frac{3}{1+(z-3)} - \frac{1}{z-3}$$

şi, procedând ca mai sus, se obţine dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{-1}{z-3} + \frac{7}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\Big(2 + \frac{1}{2^{n+1}}\Big)(z-3)^n$$

în coroana circulară $\varepsilon < |z-3| < 1$.

Din ultimele trei dezvoltări ale funcţiei $f(z)$, rezultă că punctele $z = 1$, $z = 2$ şi $z = 3$ sunt poli simpli ai funcţiei f. ■

Exerciţiul 8.3.3 *Se consideră funcţia* $f(z) = Log\,\dfrac{1-z}{1+z}$, *unde pentru logaritm se consideră determinarea care se anulează în origine. Să se dezvolte în serie de puteri ale lui* z *în discul deschis* $|z| < 1$ *şi în coroana nemărginită* $|z| > 1$.

Soluţie. Funcţia $f(z)$ are punctele critice $z = \pm 1$. Determinarea considerată este uniformă în domeniile considerate.

În discul $|z| < 1$, avem:

$$\begin{aligned}
\text{Log}\,(1-z) &= \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \\
\text{Log}\,(1+z) &= \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \cdots
\end{aligned}$$

şi deci, în discul $|z| < 1$, are loc dezvoltarea

$$f(z) = \text{Log}\,(1 - z) - \text{Log}\,(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}.$$

Cu transformarea $z = \dfrac{1}{\zeta}$, $|z| > 1$ se transformă în $|\zeta| < 1$, iar funcţia devine

$$\varphi(\zeta) = f\Big(\frac{1}{\zeta}\Big) = \text{Log}\,\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} = \pi i + \text{Log}\,\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}.$$

Folosind rezultatul precedent, putem scrie

$$\varphi(\zeta) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2n}}{n}.$$

Rezultă că pentru funcţia $f(z)$ avem

$$f(z) = \pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z^{2n}}.$$

Remarcăm că partea principală a acestei serii Laurent are o infinitate de termeni, deci $z = \infty$ este o singularitate removabilă a funcţiei. ■

Exerciţiul 8.3.4 *Să se dezvolte în serie în jurul lui* $z = 1$ *funcţia*

$$f(z) = \sin \frac{z - 2}{z - 1}.$$

Soluţie. Se scrie funcţia în forma

$$f(z) = \sin\Big(1 - \frac{1}{z - 1}\Big) = \sin 1 \cdot \cos \frac{1}{z - 1} - \cos 1 \cdot \sin \frac{1}{z - 1}$$

şi se ţine cont de dezvoltările în serie ale funcţiilor $\sin\zeta$ şi $\cos\zeta$

$$\sin\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} \cdot \zeta^{2n+1}, \quad \cos\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \zeta^{2n}.$$

Revenind la variabila z, găsim că dezvoltarea Laurent a funcţiei $f(z)$ în coroana circulară $\varepsilon|z - 1| < R$ este

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\Big(\sin 1 - \frac{\cos 1}{2n + 1} \cdot \frac{1}{z - 1}\Big)\frac{1}{(z - 1)^{2n}}.$$

Partea principală a acestei dezvoltări are o infinitate de termeni, prin urmare, funcţia $f(z)$ are în $z = 1$ un punct singular esenţial izolat. ■

Capitolul 9

Teoria reziduurilor şi aplicaţiile ei

9.1 Reziduul funcţiei analitice într–un punct singular izolat

Fie z_0 un punct singular izolat (pol sau punct singular esenţial) al unei funcţii complexe $f(z)$, univalente şi analitice pe un domeniu D. Presupunem că domeniul de analiticitate al funcţiei $f(z)$ are proprietatea că există contururi γ incluse în D astfel încât z_0 să fie un punct interior al domeniului Δ de frontieră γ.

Conform celor prezentate în capitolul precedent, funcţia $f(z)$ este dezvoltabilă în mod unic într–o serie Laurent convergentă pe o coroană circulară cu centrul în z_0 inclusă în domeniul D şi suma acestei serii, pe domeniul ei de convergenţă, este funcţia $f(z)$. Prin urmare,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

unde coeficienţii c_n ai seriei Laurent sunt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$$

în particular,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, d\zeta, \tag{9.1}$$

iar C este orice contur inclus în coroana de convergenţă $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

Definiţia 9.1.1 *Se numeşte* **reziduul** *funcţiei analitice $f : D \to \mathbb{C}$ într–o singularitate izolată z_0 a sa, numărul complex* $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta$ *în care integrala se ia pe sensul pozitiv al unui contur arbitrar γ care înconjură punctul z_0, situat în întregime în D.*

Pentru reziduul unei funcţii $f(z)$ în punctul singular al ei z_0 vom folosi notaţia $\text{Rez}\,[f(z), z_0]$.

Observaţia 9.1.1 *Dacă z_0 este un punct ordinar sau o singularitate removabilă a funcţiei $f(z)$, reziduul acestei funcţii într–un asemenea punct este zero.*

Observaţia 9.1.2 *Din* (9.1) *şi Definiţia* 9.1.1 *rezultă*

$$Rez\,[f(z), z_0] = c_1.$$

Exerciţiul 9.1.1 *Să se determine reziduurile funcţiei $f(z) = z^k\, e^{\frac{1}{z}}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, în punctele singulare izolate ale sale.*

Soluţie. Deoarece intuim că unicul punct singular al funcţiei este $z_0 = 0$, dezvoltăm funcţia $f(z)$ în serie Laurent în jurul originii. Ne folosim în acest scop de dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei e^ζ

$$e^\zeta = 1 + \frac{\zeta}{1!} + \frac{\zeta}{2!} + \cdots + \frac{\zeta^n}{n!} + \cdots$$

care este convergentă în întreg planul complex. Punând $\zeta = \dfrac{1}{z}$ obţinem dezvoltarea în serie Laurent în coroana nemărginită $|z| > 0$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}.$$

Înmulţind în ambii membri ai acestei dezvoltări cu z^k găsim dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei date în coroana nemărginită $|z| > 0$

$$f(z) = z^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^{n-k}}.$$

Deoarece partea principală a dezvoltării are, indiferent de $k \in \boldsymbol{Z}$, o infinitate de termeni, punctul $z = 0$ este un punct singular esenţial izolat

al funcţiei $f(z)$. Atunci, reziduul funcţiei în punctul $z_0 = 0$ este coeficientul lui $\frac{1}{z}$ din această dezvoltare. Acest termen se obţine pentru $n = k + 1$.

Cum $n > 0$ pentru $k < -1$, coeficientul lui $\frac{1}{z}$ este nul, iar pentru $k \geq -1$ coeficientul lui $\frac{1}{z}$ este $\frac{1}{(k+1)!}$. Deci

$$\text{Rez}\,[f(z), 0] \;=\; \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad k < -1 \\[2ex] \dfrac{1}{(k+1)!}, & \text{pentru} \quad k \geq -1. \end{cases}$$

■

9.2 Formule de calcul ale reziduurilor

Pentru a calcula reziduul funcţiei $f(z)$ într–o singularitate izolată, putem folosi formula (9.1). Deci, putem scrie

$$\text{Rez}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, d\zeta = c_{-1}. \tag{9.2}$$

Există cazuri particulare în care se pot stabili formule de calcul mai simple ale reziduului unei funcţii $f(z)$ într–un punct singular izolat al ei. În aceste formule, integrarea din (9.2) se înlocuieşte cu calculul unor derivate în punctul z_0.

Să examinăm astfel de cazuri.

(1) Presupunem că z_0 este un pol simplu al funcţiei $f(z)$. Atunci, $f(z)$ admite dezvoltarea în serie Laurent

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \cdots. \tag{9.3}$$

într–o coroană circulară centrată în z_0.

Înmulţind ambii membri ai egalităţii (9.3) cu $(z - z_0)$ şi trecând la limită pentru $z \to z_0$, obţinem

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \tag{9.4}$$

În plus, din (9.3) observăm că într–o vecinătate a punctului z_0 funcţia $f(z)$ poate fi reprezentată în forma unui raport de două funcţii analitice

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \tag{9.5}$$

unde $\varphi(z_0) \neq 0$ şi z_0 este un zerou de ordin 1 al funcţiei $\psi(z)$.

Aşadar, dezvoltarea în serie Taylor a funcţiei ψ într–o vecinătate a punctului z_0 are forma

$$\psi(z) = (z-z_0)\psi'(z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots, \quad (9.6)$$

în care $\psi'(z_0) \neq 0$. Atunci, din (9.4) – (9.6) obţinem

$$c_{-1} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (9.7)$$

Prin urmare, din (9.2) şi (9.7) rezultă că *formula de calcul al reziduului unei funcţii $f(z)$ într–un pol simplu z_0 al ei* este

$$\text{Rez}\,[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (9.8)$$

Subliniem că în cazul discutat mai sus funcţia $f(z)$ are expresia (9.5), funcţiile $\varphi(z)$ şi $\psi(z)$ sunt funcţii analitice într–o vecinătate a punctului z_0, iar z_0 este un zerou de ordinul întâi al funcţiei $\psi(z)$.

(2) Să considerăm cazul în care z_0 este un pol de ordin p pentru funcţia $f(z)$. Din capitolul precedent ştim că într–o coroană circulară centrată în z_0 are loc dezvoltarea

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-z_0)^p} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \quad (9.9)$$

Conform relaţiei (9.2), pentru a calcula reziduul funcţiei în punctul z_0 trebuie să determinăm coeficientul c_{-1} al dezvoltării (9.9). În acest scop, înmulţim ambii membri ai egalităţii (9.9) cu $(z-z_0)^p$ şi obţinem

$$(z-z_0)^p f(z) = c_{-p} + c_{-p+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{p-1} + c_0(z-z_0)^p + \cdots.$$

Pentru a determina coeficientul c_{-1} trebuie să derivăm această egalitate de $(p-1)$ ori şi apoi să facem pe z să tindă la z_0. Odată determinat c_{-1} avem şi reziduul funcţiei $f(z)$ în punctul singular z_0.

Aşadar, *formula de calcul al reziduului unei funcţii $f(z)$ în punctul singular z_0 de tip pol de ordin p* este

$$\text{Rez}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\Big((z-z_0)^p f(z)\Big). \quad (9.10)$$

Cum funcţia căreia i se calculează limita în (9.10) este continuă în punctul z_0, deci limita sa pentru $z \to z_0$ este egală cu valoarea funcţiei în z_0, formula de calcul (9.10) poate fi scrisă şi în forma

$$\text{Rez}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{(p-1)!} \cdot \Big[\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\Big((z-z_0)^p f(z)\Big)\Big]\Big|_{z=z_0}. \tag{9.11}$$

Formula (9.8) este un caz particular al formulei (9.10).

Exerciţiul 9.2.1 *Să se determine reziduurile funcţiilor $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_4(z)$ definite prin*

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{z}{z^n - 1}; & f_2(z) &= e^{iz} \cdot \text{tg}\, z; \\ f_3(z) &= \frac{z}{(z+1)(z-1)^3}; & f_4(z) &= \frac{1}{(z^2+1)^n}, \end{aligned}$$

unde $n \geq 1$ din expresiile funcţiilor f_1 şi f_4 este un număr natural arbitrar.

Soluţie. Funcţia $f_1(z)$ are punctele singulare

$$z_k = \sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

şi toate aceste n puncte sunt poli simpli situaţi pe cercul de rază unitate cu centrul în origine. Conform formulei (9.8), reziduul funcţiei $f_1(z)$ în polul simplu z_k este

$$\text{Rez}\,[f_1(z), z_k] = \frac{z_k}{n \cdot z_k^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot z_k^2 = \frac{1}{n} \cdot e^{i\frac{4k\pi}{n}} = \frac{1}{n}\Big(\cos\frac{4k\pi}{n} + i\sin\frac{4k\pi}{n}\Big).$$

Să determinăm punctele singulare izolate ale funcţiei $f_2(z)$.

În acest sens observăm că funcţia se scrie sub forma $f_2(z) = \dfrac{e^{iz}\sin z}{\cos z}$ şi deci este de tipul (9.5), unde $\psi(z) = \cos z$ are o infinitate de zerouri simple $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, unde $k \in \boldsymbol{Z}$.

Aplicând formula (9.8), obţinem

$$\text{Rez}\,[f_2(z), z_k] = \Big(\frac{e^{iz}\sin z}{(\cos z)'}\Big)\Big|_{z=z_k} = \Big(\frac{e^{iz}\sin z}{-\sin z}\Big)\Big|_{z=z_k} = -e^{iz_k} = (-1)^{k+1}.$$

Funcţia $f_3(z)$ are polul simplu $z_1 = -1$ şi polul triplu $z_2 = 1$. Pentru calculul reziduului în polul simplu folosim (9.8) şi găsim

$$\begin{aligned}\text{Rez}\,[f_3(z), z_1] &= \frac{z}{\Big((z+1)(z-1)^3\Big)'}\Big|_{z=-1} = \\ &= \Big(\frac{z}{(z-1)^3 + 3(z+1)(z-1)^2}\Big)\Big|_{z=-1} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Pentru calculul reziduului în punctul $z_2 = 1$ aplicăm formula (9.11). Avem

$$\text{Rez}\,[f_3(z), z_2] = \frac{1}{2!}\cdot\Big[\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-1)^3 f_3(z)\Big)\Big]\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}\cdot\Big[\frac{d^2}{dz^2}\Big(\frac{z}{z+1}\Big)\Big]\Big|_{z=1} = -\frac{1}{8}.$$

Cea de a patra funcţie are punctele singulare $z_{1,2} = \pm i$; ambele puncte sunt poli multipli de ordin n. Vom calcula reziduul funcţiei $f_4(z)$ în fiecare din aceste puncte folosind formula (9.11). Obţinem

$$\text{Rez}\,[f_4(z), i] = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\Big[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-i)^n\frac{1}{(z^2+1)^n}\Big)\Big]\Big|_{z=i}.$$

După simplificarea cu $(z-i)^n$ se obţine

$$\text{Rez}\,[f_4(z), i] = \frac{1}{(n-1)!}\cdot\Big[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big(\frac{1}{(z+i)^n}\Big)\Big]\Big|_{z=i}.$$

Efectuând derivata de ordinul $(n-1)$, găsim

$$\text{Rez}\,[f_4(z), i] = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{(z+i)^{2n-1}}\Big|_{z=i}.$$

Folosind artificii simple de calcul, reziduul funcţiei $f_4(z)$ în punctul singular $z_1 = i$ este

$$\text{Rez}\,[f_4(z), i] = -\,i\cdot\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}.$$

În mod analog, se găseşte că $\text{Rez}\,[f_4(z), -i] = i\cdot\dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}[(n-1)!]^2}$. ■

9.3 Teorema reziduurilor

În cele ce urmează vom stabili câteva aplicaţii importante ale noţiunilor introduse mai sus.

Teorema care urmează este esenţială în diverse cercetări teoretice şi aplicaţii practice.

Fie $\Delta \subset \mathbb{C}$ un domeniu mărginit de frontieră Γ. Reuniunea acestui domeniu cu frontiera sa este închiderea domeniului Δ, notată cu $\overline{\Delta}$; prin urmare, $\overline{\Delta} = \Delta \cup \Gamma$.

Presupunem că în mulţimea Δ se află o mulţime finită de puncte distincte $S = \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$ care sunt poli sau puncte singulare esenţiale izolate ale unei funcţii analitice pe un domeniu D.

Teorema 9.3.1 (**Teorema reziduurilor a lui Cauchy**) *Dacă funcţia $f(z)$ este analitică în domeniul D şi dacă $\overline{\Delta} \setminus S \subset D$, atunci*

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Rez[f(z), z_k], \tag{9.12}$$

unde conturul Γ este parcurs în sens pozitiv.

Demonstraţie. Amintim că dacă o funcţie $f(z)$ este analitică în domeniul închis $\overline{\Delta} \setminus S$, atunci toate punctele frontierei Γ sunt puncte regulate ale lui $f(z)$.

Izolăm fiecare din punctele singulare z_k ale funcţiei $f(z)$ printr–un contur γ_k care să conţină numai punctul z_k. Considerăm domeniul închis multiplu conex mărginit de conturul Γ şi de conturурile γ_k. Atunci, funcţia $f(z)$ este analitică în tot interiorul acestui domeniu. Prin urmare, conform Teoremei lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe, avem

$$\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta + \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k^-} f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{9.13}$$

Trecând suma din (9.13) în membrul al doilea şi folosind Definiţia 9.1.1 obţinem (9.12) şi teorema este demonstrată. ■

Importanţă practică a formulei (9.12) constă în faptul că în multe cazuri este mai simplu să evaluăm reziduurile unei funcţii $f(z)$ în singularităţile situate în interiorul domeniului limitat de un contur Γ decât să calculăm direct integrala funcţiei $f(z)$ pe conturul Γ, egalitatea între rezultate fiind asigurată de teorema reziduurilor.

Mai târziu vom prezenta unele aplicaţii importante ale acestei formule.

Aplicarea teoremei reziduurilor poate deveni laborioasă dacă numărul N al punctelor singulare este mare. În unele situaţii această dificultate poate fi înlăturată folosind reziduul funcţiei f în punctul de la infinit şi o teorema pe care o vom prezenta mai jos.

Definiţia 9.3.1 *Fie $f(z)$ o funcţie analitică în exteriorul discului închis $\overline{B}(0, R_0)$, cu centrul în origine şi raza R_0, astfel încât punctul de la infinit este pentru $f(z)$ punct ordinar, pol sau punct singular esenţial izolat.* **Reziduul funcţiei** $f(z)$ **în punctul de la infinit**, *notat cu $Rez[f(z), \infty]$, este numărul complex*

$$Rez[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{9.14}$$

unde C^+ este un contur arbitrar inclus în exteriorul discului $\overline{B}(0, R_0)$, parcurs în sens pozitiv şi în exteriorul căruia funcţia $f(z)$ nu conţine alte puncte singulare cu excepţia eventuală a punctului de la infinit.

Din această definiţie rezultă, în particular, că dacă punctul $z = \infty$ este o singularitate removabilă sau punct ordinar, atunci este posibil ca $\text{Rez}\,[f(z), \infty]$ să fie nenul, în timp ce reziduul funcţiei $f(z)$ într–un punct singular removabil sau ordinar este întotdeauna egal cu zero.

Observaţia 9.3.1 *Pentru calcularea $Rez[f(z), \infty]$ dezvoltăm în serie Laurent funcţia $f(z)$ în coroana circulară nemărginită cu centrul în origine $R_0 < |z|$ care să nu conţină singularităţile funcţiei $f(z)$ situate la distanţă finită. Avem*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta.$$

Folosind această dezvoltare şi (9.14), *deducem $Rez[f(z), \infty] = -\,c_{-1}$.*

Formulele (9.12) şi (9.14) fac posibilă demonstrarea teoremei anunţate mai sus.

Teorema 9.3.2 *Dacă funcţia $f(z)$ este analitică în întreg planul complex, cu excepţia unui număr finit de puncte singulare izolate z_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, care include şi $z = \infty$ $(z_N = \infty)$, atunci*

$$\sum_{k=1}^{N} Rez[f(z), z_k] = 0. \tag{9.15}$$

Demonstraţie. Să considerăm un contur C care să conţină în interior toate cele $N-1$ singularităţi z_k situate la distanţă finită. Conform formulei (9.12) din Teorema 9.3.1, avem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{N-1} \text{Rez}\,[f(z), z_k]. \tag{9.16}$$

Însă, în baza relaţiei (9.14), integrala din membrul stâng al egalităţii (9.16) este, cu semn contrar, reziduul funcţiei $f(z)$ în punctul de la infinit. Aceasta demonstrează teorema. ■

Teorema 9.3.2 permite, ocazional, simplificarea calculului unor integrale pe un contur, aşa cum se constată din exerciţiul care urmează.

Exerciţiul 9.3.1 *Să se calculeze integrala* $I = \displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\sin\frac{\pi}{z}\,dz$, *unde* Γ *este elipsa de ecuaţie* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$, *în următoarele cazuri:* $0<b<1$, $b>1$.

Soluţie. Funcţia f, cu valorile $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\sin\dfrac{\pi}{z}$, are singularităţile: $z_0 = 0$ punct singular esenţial; $z_1 = i$ şi $z_2 = -i$ poli simpli.

Pentru calculul reziduului funcţiei f în origine, dezvoltăm funcţia f în serie Laurent în jurul punctului $z_0 = 0$.

Pentru aceasta, folosim dezvoltările Laurent ale celor doi factori ai expresiei funcţiei în coroana $0<|z|<1$. Astfel, $f(z)$ devine

$$f(z) = (1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)\Big(\frac{1}{1!}\,\frac{\pi}{z} - \frac{1}{3!}\,\frac{\pi^3}{z^3} + \frac{1}{5!}\,\frac{\pi^5}{z^5} - \cdots\Big).$$

Coeficientul termenului în $\dfrac{1}{z}$ din produsul acestor serii este seria numerică

$$\frac{\pi}{1!} + \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} + \cdots$$

care este convergentă şi are suma $\operatorname{sh}\pi$. Aşadar, $\operatorname{Rez}[f(z),0] = \operatorname{sh}\pi$.

Pentru calculul reziduurilor în polii simpli $z_1 = i$ şi $z_2 = -i$, aplicăm formula (9.8) şi găsim:

$$\operatorname{Rez}[f(z),i] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{z}}{2z}\right)\Big|_{z=i} = \frac{\sin(-i\pi)}{2i} = -\frac{1}{2}\operatorname{sh}\pi;$$

$$\operatorname{Rez}[f(z),-i] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{z}}{2z}\right)\Big|_{z=-i} = \frac{\sin(i\pi)}{-2i} = -\frac{1}{2}\operatorname{sh}\pi.$$

Când $0<b<1$, doar punctul singular $z_0 = 0$ se află în domeniul a cărui frontieră este elipsa Γ.

Folosind teorema reziduurilor, avem

$$I = 2\pi i \,\mathrm{Rez}\,[f(z), 0] = 2\pi i \,\mathrm{sh}\,\pi.$$

Când $b > 1$, toate cele trei puncte singulare se află în domeniul limitat de elipsă şi prin urmare

$$I = 2\pi i\Big(\mathrm{Rez}\,[f(z), 0] + \mathrm{Rez}\,[f(z), i] + \mathrm{Rez}\,[f(z), -i]\Big) = 0.$$

În al doilea caz se poate obţine valoarea integralei I folosind numai reziduul funcţiei în punctul de la infinit deoarece $I = -2\pi i \,\mathrm{Rez}\,[f(z), \infty]$.

Pentru a calcula reziduul funcţiei $f(z)$ în punctul de la infinit, dezvoltăm $f(z)$ în serie Laurent în $|z| > 1$. În acest sens, scriem $f(z)$ în forma

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1}{z^2}} \sin \frac{\pi}{z}$$

Deoarece fracţia $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{z^2}}$, în domeniul considerat, este suma unei serii geometrice cu raţia $-\dfrac{1}{z^2}$ funcţia are dezvoltarea

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\Big(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \cdots\Big)\Big(\frac{1}{1!}\,\frac{\pi}{z} - \frac{1}{3!}\,\frac{\pi^3}{z^3} + \frac{1}{5!}\,\frac{\pi^5}{z^5} - \cdots\Big).$$

Dar produsul după Cauchy al celor două serii nu are termen în $\dfrac{1}{z}$ şi deci $c_{-1} = 0$, ceea ce implică $\mathrm{Rez}\,[f(z), \infty] = 0$. Regăsim $I = 0$. ■

9.4 Calculul unor integrale reale folosind teorema reziduurilor

Teoremele paragrafului precedent îşi găsesc aplicaţii nu numai în calculul integralelor din funcţii complexe de o variabilă complexă dar şi în calculul unor integrale definite din funcţii reale de o variabilă reală. Uneori, este mai convenabil să folosim metode ale funcţiilor complexe pentru a găsi valoarea unor astfel de integrale.

În cele ce urmează, vom considera tipuri de integrale definite sau improprii cărora li se pot afla mai uşor valorile folosind teorema reziduurilor.

9.4.1 Integrale de forma $\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$

Considerăm integrala proprie pe compactul $[0, 2\pi]$ a unei funcţii raţionale în argumentele $\sin\theta$ şi $\cos\theta$, deci o integrală de forma

$$I = \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta. \tag{9.17}$$

Acest tip de integrală se reduce la integrala unei funcţii complexe dacă se face schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$.

Avem

$$d\theta = \frac{dz}{iz} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \sin\theta &= \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2i}\Big(z - \dfrac{1}{z}\Big) = \dfrac{z^2 - 1}{2iz} \\ \cos\theta &= \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big) = \dfrac{z^2 + 1}{2z}. \end{cases}$$

Când θ parcurge intervalul $[0, 2\pi]$, variabila complexă z parcurge în sens pozitiv cercul $|z| = 1$, ecuaţia căruia se poate scrie şi în forma $z = e^{i\theta}$.

Astfel, integrala (9.17) se transformă în

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \mathcal{R}\Big(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\Big) \frac{dz}{z}. \tag{9.18}$$

În baza proprietăţilor generale ale funcţiilor analitice, integrantul din (9.18), care este o funcţie raţională de forma

$$\widetilde{\mathcal{R}}(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}, \tag{9.19}$$

este funcţie analitică în discul închis $|z| \leq 1$, cu excepţia eventuală a unui număr finit $N \leq m$ de puncte singulare z_k, cu $|z_k| < 1$, care sunt zerourile numitorului din (9.19).

Prin urmare, după Teorema 9.3.1,

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^{N} \text{Rez}\,[\widetilde{\mathcal{R}}(z), z_k]. \tag{9.20}$$

Punctele z_k sunt polii funcţiei $\widetilde{\mathcal{R}}(z)$.

Dacă α_k este ordinul polului z_k, atunci $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \leq m$. Situaţia $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k < m$ corespunde cazului în care numitorul funcţiei $\widetilde{\mathcal{R}}(z)$ are şi rădăcini situate în exteriorul discului $|z| \leq 1$.

În baza formulei (9.10), valoarea integralei (9.17) este dată de

$$I = 2\pi \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \cdot \left(\frac{d^{\alpha_k - 1}}{dz^{\alpha_k - 1}} \Big[(z - z_k)^{\alpha_k} \widetilde{\mathcal{R}}(z) \Big] \right) \Big|_{z = z_k}. \tag{9.21}$$

Exerciţiul 9.4.1 *Să se calculeze integralei* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin\theta}$, $a > 1$.

Soluţie. Notând $z = e^{i\theta}$, se obţine egalitatea

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{a + \dfrac{z^2 - 1}{2iz}} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}\, dz.$$

Unicul pol simplu al funcţiei $\widetilde{\mathcal{R}}(z) = \dfrac{2}{z^2 + 2aiz - 1}$, conţinut în discul $|z| = 1$, este $z_1 = i\Big(\sqrt{a^2 + 1} - a\Big)$ şi reziduul acestei funcţii în acest pol se poate calcula cu formula (9.8), deci $\mathrm{Rez}\,[\widetilde{\mathcal{R}}(z), z_1] = \dfrac{1}{z_1 + ia} = \dfrac{1}{i\sqrt{a^2 - 1}}$.

Obţinem

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \sin x} = 2\pi i\, \mathrm{Rez}\,[\widetilde{\mathcal{R}}(z), z_1] = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

■

Exerciţiul 9.4.2 *Să se calculeze integralele:*

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta, \quad I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta$$

unde $a \in I\!R$, $|a| < 1$.

Soluţie. Determinăm cele două integrale simultan considerând combinaţia

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta.$$

Efectuând schimbarea de variabilă $z = e^{i\theta}$, se obţine

$$I_1 + iI_2 = \int_{|z|=1} \frac{z^n}{1 - a\dfrac{z^2 + 1}{z} + a^2} \cdot \frac{dz}{iz} = i\int_{|z|=1} \frac{z^n}{az^2 - (1 + a^2)z + a}\, dz.$$

În acest caz, $\widetilde{\mathcal{R}}(z) = i\dfrac{z^n}{az^2 - (1+a^2)z + a}$.

Această funcţie raţională are un singur pol în discul de rază unitate cu centrul în origine, şi anume $z_1 = a$, iar reziduul funcţiei în acest pol, determinat cu ajutorul formulei (9.8), este

$$\text{Rez}\,[\widetilde{\mathcal{R}}(z), z_1] = i\frac{z_1^n}{2az_1 - (1+a^2)} = i\frac{a^n}{a^2-1}.$$

Conform Teoremei reziduurilor,

$$I_1 + iI_2 = 2\pi i \cdot i\frac{a^n}{a^2-1} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}.$$

Separând partea reală şi partea imaginară, găsim:

$$I_1 = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}; \quad I_2 = 0.$$

Remarcăm că dacă se doreşte determinarea separată a celor două integrale, calculele sunt foarte dificile.

De exemplu, cu schimbarea $z = e^{i\theta}$, integrantul lui I_1 este funcţia raţională

$$\widetilde{\mathcal{R}}(z) = \frac{i(1+z^{2n})}{2z^n[az^2 - (1+a^2)z + 1]}$$

şi are pe $z_1 = a$ pol simplu şi pe $z_2 = 0$ pol de ordin n.

Calculul reziduului acestei funcţii în z_1 este uşor de efectuat, în schimb pentru a afla reziduul în punctul z_2 ar trebui găsită derivata de ordin $(n-1)$ a raportului

$$\frac{1+z^{2n}}{az^2 - (1+a^2)z + 1},$$

care necesită multe calcule. ∎

Exerciţiul 9.4.3 *Să se calculeze următoarele integrale:*

$$\mathbf{1}^0.\ \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta; \qquad \mathbf{2}^0.\ \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos\theta}{5+4\sin\theta}d\theta;$$

$$\mathbf{3}^0.\ \int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{(5-4\cos\theta)^2}d\theta.$$

Soluţie. Ne vom ocupa doar de a treia integrală.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1+\sin\theta}{(5-4\cos\theta)^2}\, d\theta = -\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{(z+i)^2}{(2z-1)^2(z-2)^2}\, dz.$$

Trebuie să calculăm reziduul funcţiei $f(z) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{(z+i)^2}{(2z-1)^2(z-2)^2}$ în polul dublu $z_1 = 1/2$ care se află în discul de rază 1 cu centrul în origine. Găsim

$$\text{Rez}\,[f(z), z_1] = -\frac{1}{8}\left(\frac{d}{dz}\Big(\frac{z+i}{z-2}\Big)^2\right)\Big|_{z=1/2} = -\frac{5i}{27}$$

şi integrala are valoarea $\dfrac{10\pi}{27}$. ■

Exerciţiul 9.4.4 *Să se calculeze integrala* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta}$, *unde* $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$.

Soluţie. Punând $z = e^{i\theta}$, obţinem

$$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{1}{1+\dfrac{a(z^2+1)}{2z}} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{az^2+2z+a}.$$

Zerourile numitorului $z_{1,2} = -\dfrac{1}{a} \pm \sqrt{\dfrac{1}{a^2} - 1}$ sunt poli simpli pentru funcţia de integrat. Deoarece $z_1 \cdot z_2 = 1$, numai unul din aceşti poli se află în discul de rază 1 cu centrul în origine, iar acesta este $z_1 = -\dfrac{1}{a} + \sqrt{\dfrac{1}{a^2} - 1}$.

Conform Teoremei reziduurilor,

$$I = 4\pi\text{Rez}\left[\frac{1}{az^2+2z+a}, z_1\right] = 4\pi\frac{1}{a(z-z_2)}\Big|_{z=z_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$$

■

Exerciţiul 9.4.5 *Să se calculeze integrala proprie* $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\sin\theta}\, d\theta$.

Soluţie. Cu $z = e^{i\theta}$, se obţine $I = \displaystyle\int_C \frac{z^2+z+1}{z(2z^2+5iz-2)}\, dz$, unde C este cercul de ecuaţie $|z| = 1$. Integrantul are polii simpli $z_0 = 0$, $z_1 = -1/2$,

$z_3 = -2i$şi numai primii doi se găsesc în discul $|z| < 1$. Reziduurile funcţiei $f(z)$ în aceşti doi poli sunt

$$\mathrm{Rez}\,[f(z), 0] = \left[\frac{z^2+z+1}{2z^2+5iz-2}\right]\Big|_{z=0} = -\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{Rez}\,[f(z), -\frac{1}{2}] = \left[\frac{z^2+z+1}{z(4z+5i)}\right]\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i,$$

deci

$$I = 2\pi i\left(\mathrm{Rez}\,[f(z), 0] + \mathrm{Rez}\left[f(z), -\frac{1}{2}\right]\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

■

9.4.2 Integrale de forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Vom vedea cum se aplică teoria reziduurilor pentru a evalua integrala improprie convergentă $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Să presupunem că funcţia $f(x)$ este definită pe întreaga axă reală şi poate fi prelungită prin analiticitate în semiplanul superior astfel încât funcţia obţinută să satisfacă unele condiţii suplimentare cuprinse într–o teoremă care va fi demonstrată mai jos.

Lema 9.4.1 *Fie $f(z)$ o funcţie analitică în semiplanul superior $Im\,z > 0$, cu excepţia unui număr finit de puncte singulare izolate. Presupunem că există numerele pozitive R_0, M şi δ astfel încât pentru toate punctele semiplanului superior care satisfac condiţia $|z| > R_0$ are loc mărginirea*

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\delta}}. \tag{9.22}$$

Atunci

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} f(\zeta)\,d\zeta = 0, \tag{9.23}$$

unde conturul de integrare C'_R este semicercul $|z| = R$, $Im\,z > 0$, $R > R_0$, situat în semiplanul superior al planului complex (z).

Demonstraţie. În baza unei proprietăţi a integralelor în complex referitoare la modulul unei integrale dintr–o funcţie complexă pe o curbă netedă pe porţiuni, pentru $R > R_0$, avem

$$\Big|\int_{C'_R} f(\zeta)\,d\zeta\Big| \le \int_{C'_R} |f(\zeta)|\,ds < \frac{\pi M R}{R^{1+\delta}} = \frac{\pi M}{R^{\delta}} \to 0, \text{ când } R \to \infty$$

şi aceasta demonstrează lema. ∎

Observaţia 9.4.1 *Dacă ipotezele Lemei* 9.4.1 *sunt satisfăcute într–un sector de cerc* $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ *din planul complex* (z), *atunci formula* (9.23) *este adevărată cu precizarea că domeniul de integrare este arcul din cercul* C'_R *cuprins în sectorul dat.*

Observaţia 9.4.2 *Ipotezele Lemei* 9.4.1 *sunt evident satisfăcute dacă funcţia* $f(z)$ *este analitică într–o vecinătate a punctului de la infinit şi acest punct este un zerou de cel puţin ordinul al doilea al funcţiei.*

Într-adevăr, în acest caz, dezvoltarea în serie Laurent a funcţiei $f(z)$ în vecinătatea lui $z = \infty$ este

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \cdots = \frac{\psi(z)}{z^2},$$

unde funcţia $\psi(z)$ este astfel încât $|\psi(z)| < M$, ceea ce înseamnă că are loc estimarea (9.22) cu $\delta = 1$. ∎

Teorema 9.4.1 *Dacă funcţia reală de variabilă reală* f, *definită pe întreaga axă reală* $(-\infty, \infty)$, *poate fi prelungită prin analiticitate la semiplanul* $Im\, z \geq 0$ *şi dacă prelungirea sa analitică* $f(z)$ *satisface condiţiile Lemei* 9.4.1 *şi nu are singularităţi pe axa* Ox, *atunci integrala improprie* $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ *este convergentă şi*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Rez\, [f(z), z_k], \tag{9.24}$$

unde z_k *sunt singularităţile funcţiei* $f(z)$ *din semiplanul superior.*

Demonstraţie. Prin ipoteză, funcţia $f(z)$, definită în semiplanul superior, are un număr finit de singularităţi z_k pentru care $|z_k| < R_0$.

Considerăm un contur închis compus din segmentul de dreaptă $-R \leq x \leq R$ $(R > R_0)$ şi semicercul C'_R din semiplanul superior.

Conform Teoremei reziduurilor

$$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C'_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Rez}\, [f(z).z_k]. \tag{9.25}$$

Fiind satisfăcute condiţiile Lemei 9.4.1, limita termenului al doilea din membrul stâng al relaţiei (9.25) este zero când $R \to \infty$, în timp ce membrul doi este independent de R pentru $R > R_0$.

Rezultă că limita lui (9.25) există şi obţinem (9.24). ∎

Exerciţiul 9.4.6 *Să se calculeze integralele improprii*

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Soluţie. Prelungirile analitice în semiplanul superior ale funcţiilor de integrat satisfac ipotezele Teoremei 9.4.1. Punctele singulare ale acestor funcţii, situate în semiplanul superior, de tip pol simplu, sunt

$$z_{1,2} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \quad (k=0,1) \quad \Longrightarrow \quad z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\pi i\Big(\text{Rez}\,[f_1(z), z_1] + \text{Rez}\,[f_1(z), z_2]\Big), \\ I_2 &= 2\pi i\Big(\text{Rez}\,[f_2(z), z_1] + \text{Rez}\,[f_2(z), z_2]\Big). \end{aligned}$$

Reziduurile celor două funcţii în respectiv cei doi poli simpli se calculează cu (9.8). Avem

$$\begin{aligned} \text{Rez}\,[f_1(z), z_1] &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}; \\ \text{Rez}\,[f_1(z), z_2] &= \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}\cdot e^{-i\frac{9\pi}{4}} = \frac{1}{4}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}; \\ \text{Rez}\,[f_2(z), z_1] &= \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}; \\ \text{Rez}\,[f_2(z), z_2] &= \frac{z_2^2}{4z_2^3} = \frac{1}{4}\cdot e^{-i\frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Cu aceste reziduuri şi ţinând cont că $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, se găseşte

$$I_1 = I_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

■

Observaţia 9.4.3 *Dacă* $f(x)$ *din egalitatea* (9.24) *este o funcţie pară şi satisface ipotezele Teoremei* 9.4.1, *atunci*

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \pi i \sum_{k=1}^{N} Rez[f(z), z_k], \tag{9.26}$$

unde z_k *sunt singularităţile funcţiei* $f(z)$ *din semiplanul superior.*

Într-adevăr, dacă $f(x)$ este funcţie pară, atunci

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{9.27}$$

Din (9.24) şi (9.27) rezultă (9.26). ■

Observaţia 9.4.4 *O teoremă similară Teoremei* 9.4.1 *are loc în cazul când există o prelungire analitică a funcţiei $f(x)$ în semiplanul inferior care să satisface ipotezele Lemei* 9.4.1.

Exerciţiul 9.4.7 *Să se determine valorile integralelor improprii de prima speţă:*

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 - x^2 + 1}; \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}; \quad I_3 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^8+1};$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6+1}; \quad I_5 = \int_0^{\infty} \frac{(x^2+2)dx}{(x^4+16)^2}; \quad I_6 = \int_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

9.4.3 Integrale de forma $I = \int_0^{\infty} x^{\alpha}\mathcal{R}(x)\,dx,\ \alpha \in (-1,0)\cup(0,1)$

Fie $\mathcal{R}(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ o funcţie raţională care satisface condiţiile:

$$Q(x) \neq 0, \quad (\forall)\ x \in [0,\infty); \qquad \alpha + 1 + \mathrm{gr}\,(P) < \mathrm{gr}\,(Q),$$

unde $\mathrm{gr}\,(P)$ şi $\mathrm{gr}\,(Q)$ sunt gradele polinoamelor $P(x)$ şi $Q(x)$.

Astfel, integrala I este convergentă şi putem scrie

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \rho\to\infty}} \int_{\varepsilon}^{\rho} x^{\alpha}\mathcal{R}(x)\,dx.$$

Dorim să vedem cum se aplică teorema reziduurilor pentru calculul acestui tip de integrale improprii de prima speţă.

Pentru aceasta, avem nevoie de două leme.

Precizăm că S_0 este sectorul circular cu vârful în z_0 şi raza R_0,

$$S_0 = \{z = z_0 + re^{i\varphi}|\ 0 < r < R_0,\ \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2\}, \quad 0 < \varphi_2 - \varphi_1 \le 2\pi,$$

Frontiera lui S_0 este o porţiune din cercul de rază R_0 şi centrul în punctul z_0 la care se adaugă două raze ale cercului, care fac cu axa Ox unghiurile φ_1 şi φ_2.

Lema 9.4.2 *Fie f o funcţie continuă pe sectorul circular S_0 cu vârful în punctul fixat z_0. Dacă* $\lim\limits_{z\to z_0, z\in S_0}[(z-z_0)f(z)]=0$, *atunci* $\lim\limits_{\rho\to 0}\int_\gamma f(z)\,dz=0$, *unde $\gamma\subset S_0$ este un arc de cerc de rază ρ şi cu centrul în punctul z_0.*

Demonstraţie. Continuitatea funcţiei f pe sectorul S_0 asigură existenţa integralei pe γ. Prin ipoteză $\lim\limits_{z\to z_0, z\in S_0}[(z-z_0)f(z)]=0$, deci $(\forall)\ \varepsilon>0$, $(\exists)\,\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât

$$|(z-z_0)f(z)|<\varepsilon,\quad (\forall)\ z\in S_0 \quad \text{cu} \quad |z-z_0|<\delta(\varepsilon).$$

Alegând $\rho<\delta(\varepsilon)$, avem

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|=\left|\int_\gamma \frac{(z-z_0)f(z)}{z-z_0}\,dz\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}L(\gamma),$$

unde $L(\gamma)$ este lungimea arcului de cerc γ.

Deoarece $L(\gamma)\le 2\pi\rho$, rezultă că $\rho<\delta(\varepsilon)$ implică $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|<2\pi\varepsilon$ şi lema este demonstrată. ■

Lema 9.4.3 *Dacă $f(z)$ este o funcţie continuă pe mulţimea*

$$S_0'=\{z=z_0+r\,e^{i\varphi}|\ r>R_0,\ \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2\}$$

şi dacă $\lim\limits_{|z-z_0|\to\infty, z\in S_0'}[(z-z_0)f(z)]=0$, *atunci* $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_\gamma f(z)\,dz=0$, *unde $\gamma\subset S_0'$ este un arc de cerc de rază ρ şi cu centrul în punctul z_0.*

Demonstraţie. La fel ca mai sus, existenţa integralei pe orice arc de cerc $\gamma\subset S_0'$ este asigurată de continuitatea funcţiei f pe mulţimea S_0'. Din ipoteză rezultă că oricare ar fi $\varepsilon>0$, există numărul $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât pentru orice $z\in S_0'$ cu $|z-z_0|>\delta(\varepsilon)$, avem $|(z-z_0)f(z)|<\varepsilon$. În particular, pentru $\rho>\delta(\varepsilon)$, $|(z-z_0)f(z)|<\varepsilon$, $(\forall)\ z\in\gamma$.

Din aceleaşi considerente ca în lema anterioară, avem că $\rho>\delta(\varepsilon)$ implică

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right|=\left|\int_\gamma \frac{(z-z_0)f(z)}{z-z_0}\,dz\right|<\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi\rho=2\pi\varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{\rho\to\infty}\int_\gamma f(z)\,dz=0$. ■

Considerăm acum funcţia multiformă $z\mapsto z^\alpha\mathcal{R}(z)$, tăietura

$$T=\{z\in \mathbb{C},\ z=x+iy|\ y=0,\ x\ge 0\}$$

şi să notăm $D = \mathbb{C} \setminus T$. Alegem una din ramurile acestei corespondenţe, definite pe D, de exemplu $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$, cu valorile

$$f(z) = e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}\mathcal{R}(z),$$

unde r şi φ sunt modulul şi respectiv argumentul numărului complex z; prin urmare $z = r\, e^{i\varphi}$.

Funcţia $f(z)$ astfel introdusă nu are alte puncte singulare pe domeniul D decât polii funcţiei raţionale $\mathcal{R}(z)$.

Fie $\Delta = \{z = r\, e^{i\varphi} |\ \varepsilon < r < \rho,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$, deci coroana circulară cu centrul în origine, cu raza interioară ε şi cu raza exterioară ρ, din care s–a scos segmentul $[\varepsilon, \rho] \subset T$. Evident, $\Delta \subset D$.

Aplicăm teorema reziduurilor funcţiei f prelungită prin continuuitate pe cele două borduri ale tăieturii T. Vom lua ε suficient de mic şi ρ suficient de mare astfel încât Δ să conţină toţi polii funcţiei f.

Ţinând seama că pentru $\varphi = 0$ avem

$$z = x, \quad r = x, \quad e^{\alpha(\ln x + i\varphi)} = e^{\alpha \ln x} = x^{\alpha},$$

iar pentru $\varphi = 2\pi$ avem

$$z = x, \quad r = x, \quad e^{\alpha(\ln x + i\varphi)} = e^{\alpha(\ln x + 2\pi i)} = x^{\alpha} e^{2\pi i\alpha},$$

integrala de–a lungul frontierei $\partial\Delta$ are valoarea

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \int_{\varepsilon}^{\rho} x^{\alpha}\mathcal{R}(x)\, dx + \int_{\Gamma} f(z)\, dz + e^{2\pi i\alpha} \int_{\rho}^{\varepsilon} x^{\alpha}\mathcal{R}(x)\, dx - \int_{\gamma} f(z)\, dz, \tag{9.28}$$

unde Γ este cercul de rază ρ cu centrul în origine, iar γ este un cerc de rază ε concentric cu primul din care s–au înlăturat punctele de pe axa Ox.

Ambele cercuri sunt parcurse în sens pozitiv (semnul minus din faţa ultimei integrale se datorează faptului că s–a schimbat orientarea cercului γ).

Din teorema reziduurilor, rezultă

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \text{Rez}\,[f(z), z_k]. \tag{9.29}$$

Să demonstrăm că

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\gamma} f(z)\, dz = 0; \qquad \lim_{\rho\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\, dz = 0.$$

Pentru aceasta să verificăm dacă sunt satisfăcute ipotezele Lemei 9.4.2 şi Lemei 9.4.3.

Avem

$$|zf(z)| = \frac{|z|^{\alpha+1}|P(z)|}{|Q(z)|}.$$

Dar, prin ipoteză, $\alpha > -1$, deci $\alpha+1 > 0$ şi $\lim\limits_{z\to 0}[zf(z)] = 0$. De asemenea, deoarece $\alpha + 1 + \mathrm{gr}\,(P) < \mathrm{gr}\,(Q)$, obţinem $\lim\limits_{z\to\infty}[zf(z)] = 0$.

Aşadar, se poate aplica Lema 9.4.2 şi Lema 9.4.3.

Folosind eceste leme şi trecând la limită în relaţia (9.28), cu luarea în consideraţie a relaţiei (9.29), obţinem

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Rez}\,[f(z), z_k], \tag{9.30}$$

de unde se poate deduce valoarea integralei I.

Exerciţiul 9.4.8 *Să se calculeze integralele improprii de prima speţă:*

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{a^2 + x^2}\, dx, \quad a > 0, \quad \alpha \in (-1, 1); \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3}\, dx.$$

Soluţie. Ambele integrale se încadrează în tipul studiat mai sus. Pentru I_1, ramura principală a prelungirii analitice a funcţiei de integrat este

$$f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2} \cdot e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}, \quad \text{unde} \quad z = r\, e^{i\varphi}.$$

Reziduurile funcţiei $f(z)$ în polii ei $z_1 = ia$ şi $z_2 = -ia$ sunt

$$\mathrm{Rez}\,[f(z), z_1] \;=\; \Big(\frac{1}{2z} \cdot e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}\Big)\Big|_{z=z_1} \;=\; \frac{a^{\alpha-1}}{2i} \cdot e^{i\frac{\alpha\pi}{2}},$$

$$\mathrm{Rez}\,[f(z), z_2] \;=\; \Big(\frac{1}{2z} \cdot e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}\Big)\Big|_{z=z_2} \;=\; -\frac{a^{\alpha-1}}{2i} \cdot e^{i\frac{3\alpha\pi}{2}}.$$

Conform formulei (9.30), avem

$$(1 - e^{2\pi i\alpha}) I_1 = \pi\, a^{\alpha-1}\Big(e^{i\frac{\alpha\pi}{2}} - e^{i\frac{3\alpha\pi}{2}}\Big).$$

Însă, $1 - e^{2\pi i\alpha} = 1 - \cos 2\pi\alpha - i \sin 2\pi\alpha = -2i\, \sin \pi\alpha\, e^{i\pi\alpha}$, astfel că putem scrie

$$-2i\, \sin \pi\alpha\, e^{i\pi\alpha} \cdot I_1 = \pi\, a^{\alpha-1}\Big(e^{i\frac{\alpha\pi}{2}} - e^{i\frac{3\alpha\pi}{2}}\Big).$$

Înmulţim în ambii membri cu $e^{-i\pi\alpha}$ şi obţinem

$$I_1 \cdot 2i \sin \pi\alpha = \pi\alpha^{\alpha-1} \cdot 2i \sin \frac{\pi\alpha}{2}$$

de unde

$$I_1 = \frac{\pi\alpha^{\alpha-1}}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Pentru calculul integralei I_2 putem aplica teorema reziduurilor funcţiei

$$g(z) = \frac{\sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}}{1+z^3}, \quad \text{cu} \quad z = r\, e^{i\varphi},$$

şi domeniului Δ din Lema 9.4.3. Funcţia g are polii simpli

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Procedând ca mai sus, se obţine $I_2 = \dfrac{\pi}{3}$. ■

Exerciţiul 9.4.9 *Să se calculeze integralele*

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+1)^2}\, dx; \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{x^2+4}\, dx; \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+x^2}\, dx.$$

9.4.4 Integrale de forma $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx$. Lema lui Jordan

Calculul unei importante clase de integrale improprii prin intermediul teoremei reziduurilor se bazează pe lema lui Jordan.

Lema 9.4.4 (**Lema lui Jordan**) *Dacă funcţia $f(z)$ este analitică în semiplanul superior $Im\, z > 0$, exceptând un număr finit de puncte singulare izolate, şi tinde la zero uniform în raport cu $arg\, z$ când $z \to \infty$, atunci pentru $\omega > 0$*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C'_R} e^{i\omega\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0, \tag{9.31}$$

unde C'_R este un arc din cercul $|z| = R$ din semiplanul $Im\, z > 0$.

Demonstraţie. Ipoteza că $f(z)$ tinde la zero când $z \to \infty$, uniform în raport cu argumentul lui z, implică evaluarea

$$|f(z)| < \mu_R, \quad \text{pentru } |z| = R, \tag{9.32}$$

unde $\mu_R \to 0$ când $R \to \infty$. Pentru a folosi (9.32) efectuăm schimbarea de variabilă $\zeta = R\, e^{i\varphi}$ şi luăm în calcul faptul că

$$\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi} \quad \text{pentru} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \tag{9.33}$$

Obţinem

$$\Big|\int_{C'_R} e^{i\,\omega\zeta} f(\zeta)\, d\zeta\Big| \leq \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} |e^{i\,\omega\,\zeta}|\, d\varphi = \mu_R \cdot R \int_0^{\pi} e^{-\,\omega R \sin\varphi}\, d\varphi. \tag{9.34}$$

Dar,

$$\int_0^{\pi} e^{-\,\omega R \sin\varphi}\, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\,\omega R \sin\varphi} d\varphi. \tag{9.35}$$

Folosind (9.33), obţinem majorarea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\,\omega R \sin\varphi}\, d\varphi < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\,\frac{2\omega R}{\pi}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2\omega R}(1 - e^{-\omega R}). \tag{9.36}$$

Din (9.34) – (9.36) rezultă

$$\Big|\int_{C'_R} e^{i\,\omega\zeta} f(\zeta)\, d\zeta\Big| < \frac{\pi \mu_R}{\omega R}(1 - e^{-\omega}). \tag{9.37}$$

Trecând la limită în (9.37) pentru $R \to \infty$, obţinem (9.31) şi lema este demonstrată. ■

Lema lui Jordan se foloseşte la calculul unor integrale improprii de al doilea tip.

Teorema 9.4.2 *Dacă funcţia $f(x)$, definită pe întreaga axă a numerelor reale, poate fi prelungită prin continuuitate în semiplanul superior $Im\, z \geq 0$ şi prelungirea sa $f(z)$ este funcţie analitică, satisface ipotezele lemei lui Jordan în semiplanul superior şi nu are singularităţi pe axa reală, atunci integrala improprie de prima speţă $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx$, $\omega > 0$, există şi este egală cu*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} Rez[e^{i\omega z} f(z), z_k], \tag{9.38}$$

unde z_k sunt singularităţile funcţiei $f(z)$ situate în semiplanul superior.

Demonstraţie. Punctele singulare z_k, $k \in \overline{1,N}$, ale prelungirii analitice a funcţiei f fiind la distnţă finită de origine rezultă că ele satisfac condiţia $|z_k| < R_0$. Considerăm conturul din semiplanul superior $\operatorname{Im} z \geq 0$ compus din segmentul $[-R, R]$ de pe axa reală Ox şi semicercul C'_R de ecuaţie $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, unde raza acestuia este astfel încât $R > R_0$. După teorema reziduurilor,

$$\int_{-R}^{R} e^{i\omega x} f(x)\, dx + \int_{C'_R} e^{i\omega\zeta} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Rez}\,[e^{i\omega z} f(z), z_k]. \tag{9.39}$$

Folosind Lema lui Jordan, deducem că limita pentru $R \to \infty$ al celui de al doilea termen din membrul întâi al relaţiei (9.39) este zero, primul termen având limita egală cu integrala din (9.38). ■

Observaţia 9.4.5 *Dacă $f(x)$ din* (9.38) *este funcţie pară şi satisface ipotezele Teoremei* 9.4.2, *atunci pentru $\omega > 0$*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(x)\, \cos \omega x\, dx &= \pi\, Re \left(i \sum_{k=1}^{N} Rez[e^{i\omega z} f(z), z_k] \right) = \\ &= -\pi\, Im \sum_{k=1}^{N} Rez[e^{i\omega z} f(z), z_k]. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Observaţia 9.4.6 *Dacă $f(x)$ este funcţie impară şi satisface ipotezele Teoremei* 9.4.2, *atunci pentru $\omega > 0$*

$$\int_0^{\infty} f(x)\, \sin \omega x\, dx = \pi\, Re \left(\sum_{k=0}^{N} Rez[e^{i\omega z} f(z), z_k] \right). \tag{9.41}$$

Exerciţiul 9.4.10 *Să se arate că au loc egalitatăţile:*

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\, dx &= \frac{\pi}{2bc(b^2-c^2)} \cdot (b\, e^{-ac} - c\, e^{-ab}); \\ \int_0^{\infty} \frac{x\, \sin ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\, dx &= \frac{\pi}{2(b^2-c^2)} \cdot (e^{-ac} - e^{-ab}). \end{aligned} \tag{9.42}$$

Soluţie. Funcţiile $f_1(z)$ şi $f_2(z)$ din Observaţia 9.4.5 şi respectiv Observaţia 9.4.6 sunt:

$$f_1(z) = \frac{1}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}; \quad f_2(z) = \frac{z}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}.$$

Pentru ambele funcţii, $N = 2$, $z_1 = ib$ şi $z_2 = ic$. Reziduurile în z_1 şi z_2 ale funcţiilor:

$$\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}; \quad \frac{z\,e^{iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}$$

sunt

$$\begin{aligned}
\text{Rez}\left[\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}\right] &= \left(\frac{e^{iaz}}{(z+ib)(z^2+c^2)}\right)\Big|_{z=z_1} &= \frac{e^{-ab}}{2ib(c^2-b^2)},\\
\text{Rez}\left[\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}\right] &= \left(\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)(z+ic)}\right)\Big|_{z=z_2} &= \frac{e^{-ac}}{2ic(b^2-c^2)}\\
\text{Rez}\left[\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}\right] &= \left(\frac{ze^{iaz}}{(z+ib)(z^2+c^2)}\right)\Big|_{z=z_1} &= \frac{e^{-ab}}{2(c^2-b^2)},\\
\text{Rez}\left[\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)(z^2+c^2)}\right] &= \left(\frac{ze^{iaz}}{(z^2+b^2)(z+ic)}\right)\Big|_{z=z_2} &= \frac{e^{-ac}}{2(b^2-c^2)}.
\end{aligned}$$

Dacă aplicăm formulele (9.40) şi (9.41), se obţine (9.42). ■

Exerciţiul 9.4.11 *Să se calculeze integrala* $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{x(x^2+a^2)^2}\,dx$, $\omega > 0$.

Soluţie. Scriem $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{x(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\omega x}{x(x^2+a^2)^2}\,dx$ şi alegem funcţia ajutătoare $f(z) = \dfrac{e^{i\omega z}}{z(z^2+a^2)^2}$. Conturul de integrare va fi format din două semicercuri concentrice cu centrul în origine, situate în semiplanul superior, primul de rază r notat cu γ, al doilea de rază $R > r$, notat cu Γ, la care se adaugă segmentele de dreaptă $[-R, -r]$ şi $[r, R]$. Sensul de parcurs al conturului este cel pozitiv. În interiorul conturului se află polul dublu $z_1 = ia$ având reziduul

$$\text{Rez}\,[f(z), z_1 = ia] = \frac{1}{1!}\Big((z-ia)f(z)\Big)'\Big|_{z=ia} =$$

$$= \left(\frac{e^{i\omega z}}{z(z+ia)^2}\right)'\Big|_{z=ia} = -\frac{2+a\omega}{4a^4}\cdot e^{-a\omega}.$$

Folosind teorema reziduurilor, scriem

$$\int_r^R \frac{e^{i\omega x}\,dx}{x(x^2+a^2)^2} + \int_\Gamma \frac{e^{iaz}\,dz}{z(z^2+a^2)^2} + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{i\omega x}\,dx}{x(x^2+a^2)^2} + \int_\gamma \frac{e^{iaz}\,dz}{z(z^2+a^2)^2} =$$

$$= 2\pi i\,\mathrm{Rez}\,[f(z), ia]. \tag{9.43}$$

Suma integralelor pe cele două segmente de pe axa reală este

$$\int_r^R \frac{e^{i\omega x} - e^{-\,i\omega x}}{x(x^2+a^2)^2}\,dx = 2i\int_r^R \frac{\sin\omega x}{x(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

Pe semicercul Γ, funcţia $g(z) = \dfrac{1}{z(z^2+a^2)}$ satisface inegalitatea $|g(z)| \le \dfrac{1}{R(R^2-b^2)^2}$ şi tinde la zero, uniform în raport cu argumentul lui z, când $R\to\infty$. Întrucât $\omega > 0$, potrivit lemei lui Jordan,

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma \frac{e^{i\omega z}\,dz}{z(z^2+a^2)^2} = 0.$$

În ultima integrală din (9.43) considerăm seria Laurent a funcţiei $f(z)$ în jurul punctului $z=0$

$$f(z) = \frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{z}\cdot e^{i\omega x}\left(1+\frac{z^2}{a^2}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{z}\left(1+\frac{i\omega z}{1!}+\frac{(i\omega z)^2}{2!}+\cdots\right)\left(1-\frac{2}{1!}\frac{z^2}{a^2}+\frac{2\cdot 3}{2!}\frac{z^4}{a^4}+\cdots\right)$$

pe care o scriem sub forma

$$f(z) = \frac{1}{a^4}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{a^4}\cdot\varphi(z),$$

unde $\varphi(z) = i\omega - \Big(\dfrac{\omega^2}{2}+\dfrac{2}{a^2}\Big)z+\cdots$ este o funcţie analitică într–o vecinătate a originii. Pe semicercul γ avem $z = re^{i\theta}$, cu $\theta\in[\pi,0]$, şi

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{1}{a^4}\int_\gamma\frac{dz}{z}+\frac{1}{a^4}\int_\gamma\varphi(z)\,dz = \frac{i}{a^4}\int_\pi^0 d\theta + \frac{ir}{a^4}\int_\pi^0 \varphi(re^{i\theta})e^{i\theta}\,d\theta,$$

de unde

$$\lim_{r\to 0}\int_\gamma f(z)\,dz = -\frac{i\pi}{a^4}.$$

Trecând la limită în (9.43) pentru $R \to \infty$ şi $r \to 0$, obţinem

$$2i\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x(x^2+a^2)^2}\,dx - \frac{i\pi}{a^4} = 2\pi i \cdot \mathrm{Rez}\,[f(z), z_1 = ia] = -2\pi i\frac{2+a\omega}{4a^4}\cdot e^{-a\omega},$$

de unde, după împărţirea cu $2i$, deducem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x(x^2+a^2)^2}\,dx - \frac{\pi}{2a^4} = -\pi\frac{2+a\omega}{4a^4}\cdot e^{-a\omega}.$$

Prin urmare, valoarea integralei date este

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{x(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^4}\Big(2-(2+a\omega)e^{-a\omega}\Big).$$

■

Exerciţiul 9.4.12 *Folosind metoda de la exerciţiul precedent, să se arate că au loc următoarele egalităţi:*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},\ \ (\textit{Integrala lui Dirichlet});$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\cdot\frac{\sin \omega\, x}{x}\,dx = \pi\Big(e^{-a\omega}-\frac{1}{2}\Big),\ \ \omega>0,\ \ a>0;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a),\ \ a\ge 0,\ \ b\ge 0.$$

Exerciţiul 9.4.13 *Să se calculeze integrala* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2-6x+13}dx.$

Soluţie. Observăm că

$$I = \Re\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-6x+13}dx\Big)$$

şi integrala din membrul drept se încadrează în tipul celor studiate de Teorema 9.4.2, unde $f(z) = \dfrac{z}{z^2-6z+13}$ şi $\omega = 1$. Singurul punct singular al funcţiei $f(z)$ situat în semiplanul superior este polul simplu$z_1 = 3+2i$. Conform relaţiei (9.41),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-6x+13}dx = 2\pi i\mathrm{Rez}\,[e^{iz}f(z), z_1].$$

Calculăm

$$\text{Rez}\,[e^{iz}f(z), z_1] = \frac{ze^{iz}}{(z^2-6z+13)'}\Big|_{z=z_1} = \frac{ze^{iz}}{2z-6}\Big|_{z=z_1} =$$

$$= \frac{1}{i4e^2}(3\cos 3 - 2\sin 3 + i(2\cos 3 + 3\sin 3)).$$

Rezultă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2-6x+13}dx = \frac{\pi}{2e^2}(3\cos 3 - 2\sin 3 + i(2\cos 3 + 3\sin 3)),$$

de unde

$$I = \frac{\pi}{2e^2}(3\cos 3 - 2\sin 3).$$

Odată cu valoarea lui I mai obţinem

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-6x+13}dx = \frac{\pi}{2e^2}(2\cos 3 + 3\sin 3).$$

■

9.4.5 Integrale de forma $I = \int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)\ln x\, dx$, cu $\alpha \in (-1, 1)$

În integrala I, $\mathcal{R}(x)$ este o funcţie raţională al cărei numitor $Q(x)$ nu se anulează pe intervalul real $[0, \infty)$. Pentru convergenţa integralei improprii I, presupunem

$$1 + \alpha + \text{gr}\,(P) < \text{gr}\,(Q),$$

unde $P(x)$ este numărătorul funcţiei raţionale $\mathcal{R}(x)$.

Integrala I se calculează folosind teorema reziduurilor pentru domeniul Δ de la calculul integralelor de forma $\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)\, dx$ şi funcţia $f : D \to \mathbb{C}$, definită prin

$$f(z) = \mathcal{R}(z)(\ln r + i\varphi)e^{\alpha(\ln r + i\varphi)}, \quad z = r\, e^{i\varphi}, \tag{9.44}$$

ramura principală pe domeniul D (determinarea fundamentală) a corespondenţei $z \mapsto \mathcal{R}(z)e^{\alpha \text{Log}\, z}\text{Log}\, z$. Trecând la limită în (9.28), în care $f(z)$ este funcţia (9.44), se obţine

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)\, \ln x\, dx - e^{2\pi i\alpha}\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)(\ln x + 2\pi i)dx = \\ &= 2\pi i \sum_{k=0}^{N} \text{Rez}\,[f(z), z_k],\end{aligned} \tag{9.45}$$

unde z_k sunt toţi polii funcţiei $f(z)$.

Din compararea părţilor reale şi imaginare din cei doi membri ai ultimei egalităţi, se obţine atât I cât şi o integrală de tipul $\int_0^\infty x^\alpha \mathcal{R}(x)\,dx$.

Exerciţiul 9.4.14 *Să se calculeze integrala improprie* $I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}\,dx.$

Soluţie. Aplicăm formula (9.45) în care $\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\mathcal{R}(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, ceea ce înseamnă că funcţia $f(z)$ are expresia

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2} e^{\left(\frac{1}{2}(\ln r + i\varphi)\right)} (\ln r + i\varphi), \quad z = r\,e^{i\varphi}.$$

Avem

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}\,dx - e^{\pi i}\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}(\ln x + 2\pi i)}{x^2+a^2}\,dx = \\ &= 2\pi i\Big(\text{Rez}\,[f(z), ia] + \text{Rez}\,[f(z), -ia]\Big) \end{aligned} \tag{9.46}$$

Dacă se efectuează calculele în (9.46), se găseşte

$$2I + 2\pi i\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}(\pi + 2\ln a + 2\pi i),$$

din care va rezulta atât valoarea integralei I cât şi a unei alte integrale

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}\Big(\frac{\pi}{2} + \ln a\Big); \qquad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2a}}.$$

■

Exerciţiul 9.4.15 *Să se calculeze integralele improprii:*

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}; \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^4+1}\,dx.$$

Soluţie. Am putea să aplicăm formula (9.45) care presupune calculul reziduurilor funcţiei $f(z)$ în cei patru poli simpli. Este însă mai simplu dacă reducem conturul la primul cadran, căci funcţia

$$f(z) = \frac{\ln r + i\varphi}{z^4+1}, \quad z = r\,e^{i\varphi}$$

va avea doar un singur pol în domeniul Δ_0 limitat de contur, şi anume $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Conturul domeniului Δ_0 este segmentul $[\varepsilon, \rho]$ de pe axa Ox, reunit cu sfertul de cerc Γ de ecuaţie $z = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi/2]$, cu segmentul de dreaptă $[\rho, \varepsilon]$ de pe axa Oy şi cu sfertul de cerc γ de ecuaţie $z = \varepsilon e^{i\tau}$, unde $\tau \in [\pi/2, 0]$.

Teorema reziduurilor pentru funcţia $f(z)$ şi domeniul Δ_0, conduce la

$$\int_\varepsilon^\rho \frac{\ln x}{x^4+1}\,dx + \int_\Gamma f(z)\,dz + i\int_\rho^\varepsilon \frac{\ln y + i\dfrac{\pi}{2}}{y^4+1}\,dx + \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Rez}\,[f(z), z_1]. \tag{9.47}$$

Deoarece $\lim\limits_{z\to 0}(zf(z)) = 0$ şi $\lim\limits_{z\to\infty}(zf(z)) = 0$, afirmaţii uşor de demonstrat în baza Lemelor 9.4.2 şi 9.4.3, rezultă:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\gamma f(z)\,dz = 0; \quad \lim_{\rho\to\infty}\int_\Gamma f(z)\,dz = 0. \tag{9.48}$$

Dacă trecem la limită în (9.47) pentru $\varepsilon \to 0$ şi $\rho \to \infty$ şi ţinem cont de (9.48), obţinem

$$(1-i)I_2 + \frac{\pi}{2}\,I_1 = 2\pi i \,\mathrm{Rez}\,[f(z), z_1].$$

Dar reziduul funcţiei $f(z)$ în polul simplu z_1 este

$$\mathrm{Rez}\,[f(z), z_1] = \left(\frac{\ln r + i\varphi}{4z^3}\right)\Big|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{16}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{32}i(1+i)$$

şi egalitatea (9.47) devine $I_2 + \dfrac{\pi}{2}I_1 - i\,I_2 = \dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}(1+i)$. de unde găsim $I_1 = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$; $\quad I_2 = -\dfrac{\pi^2\sqrt{2}}{16}$. ■

Exerciţiul 9.4.16 *Folosind* (9.45), *să se determine valoarea integralei*

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\ln x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Indicaţie. Se consideră funcţia complexă multiformă $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}\,\mathrm{Log}\,z}{(1+z)^2}$ în care pentru radical şi logaritm se iau determinările principale. Se efectuează integrarea pe frontiera coroanei circulare cu centrul în origine având razele ε şi ρ din care se scoate segmentul de dreaptă $[\varepsilon, \rho]$ de pe axa Ox. Rezultă $I = \pi$. ■

Capitolul 10

Serii trigonometrice şi serii Fourier

10.1 Serii trigonometrice

Definiţia 10.1.1 *Se numeşte* **serie trigonometrică**, *seria de funcţii reale*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \tag{10.1}$$

unde ω, a_0, a_k, b_k *sunt constante reale, iar* t *este o variabilă reală.*

Deoarece funcţiile $\cos x$ şi $\sin x$ sunt periodice de perioadă 2π, funcţiile $\cos \omega t$ şi $\sin \omega t$ au perioada $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Verificarea este imediată

$$\cos \omega t = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos \omega(t + \frac{2\pi}{\omega});$$

$$\sin \omega t = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin \omega(t + \frac{2\pi}{\omega}).$$

La fel se arată că funcţiile $\cos k\omega t$ şi $\sin k\omega t$, k număr natural, au o aceeaşi perioadă $T_k = \dfrac{T}{k} = \dfrac{1}{k}\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Observaţia 10.1.1 *Cea mai mare dintre perioadele funcţiilor*

$$\cos k\omega t, \quad \sin k\omega t, \quad k \in I\!N,$$

notată cu T, *este perioada seriei trigonometrice. Prin urmare,* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Ţinând seama de această observaţie, putem afirma că dacă seria trigonometrică este convergentă într–un punct t_0, iar suma sa este $S(t_0)$, seria va fi convergentă şi în punctele $t_0 + nT$, $n \in \mathbb{Z}$, şi avem

$$S(t_0 + nT) = S(t_0).$$

De aici rezultă că este suficient să cunoaştem natura seriei într–un interval $[\alpha, \alpha + T]$ pentru a putea spune care este natura seriei pentru orice t real.

În ipoteza că a_1 şi b_1 nu sunt simultan nuli, suma seriei

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

este o funcţie periodică de perioadă $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, definită pe toată axa reală.

Constanta ω se numeşte pulsaţie.

10.2 Seria Fourier a unei funcţii periodice

Seriile trigonometrice se întâlnesc în studiul fenomenelor periodice din acustică, electrotehnică, vibraţia sistemelor mecanice etc., unde se pune deseori problema reprezentării unei funcţii periodice $f(t)$ printr–o serie trigonometrică

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t). \tag{10.2}$$

Dacă perioada funcţiei $f(t)$ este T, atunci pulsaţia este $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Se ridică două probleme:

1. În ipoteza că $f(t)$ este egală cu suma unei serii trigonometrice, să se determine coeficienţii a_0, a_k, b_k.

2. Precizarea unor condiţii în care $f(t)$ poate fi dezvoltată în serie trigonometrică de forma (10.2).

Ne vom ocupa întâi de prima problemă. În acest sens presupunem că funcţia $f(t)$ este integrabilă Riemann pe intervalul $[\alpha, \alpha{+}T]$ şi că seria (10.2) poate fi integrată termen cu termen. Avem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = a_0 \int_{\alpha}^{\alpha+T} dt + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t dt + b_k \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t dt\Big).$$

Însă, $\int_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t\, dt = 0, \quad \int_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t\, dt = 0; \quad k \in I\!N^*,$ astfel că dacă folosim aceste rezultate în egalitatea de integrale de mai sus, obţinem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt = a_0\, T. \tag{10.3}$$

Înmulţind ambii membri ai egalităţii (10.2) cu $\cos p\omega t$, unde p este un număr natural oarecare, şi integrând pe intervalul $[\alpha, \alpha + T]$, obţinem

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, \cos p\omega t\, dt = \frac{T}{2} a_p. \tag{10.4}$$

Pentru determinarea coeficienţilor b_k se înmulţeşte egalitatea (10.2) cu $\sin p\omega t$, unde p este un număr natural oarecare şi se integrează apoi termen cu termen pe intervalul $[\alpha, \alpha + T]$. Se găseşte

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, \sin p\omega t\, dt = \frac{T}{2} b_p. \tag{10.5}$$

Din (10.3) – (10.5), cu o schimbare de notaţie, avem

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, dt, \\ a_k & = & \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, \cos k\omega t\, dt \\ b_k & = & \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\, \sin k\omega t\, dt, \quad k \in I\!N^*. \end{array} \right. \tag{10.6}$$

Aceste egalităţi se numesc *formulele lui Euler şi Fourier.*

Fie $f(t)$ o funcţie periodică de perioadă T, integrabilă Riemann pe intervalul $[\alpha, \alpha + T]$.

Definiţia 10.2.1 *Constantele* a_0, a_k, b_k, *determinate de integralele definite* (10.6), *se numesc* **coeficienţii Fourier ai funcţiei** $f(t)$, *iar seria trigonometrică* (10.1), *cu aceşti coeficienţi, se numeşte* **seria Fourier ataşată funcţiei** $f(t)$ *chiar dacă seria* (10.1) *nu este convergentă în nici un punct sau, convergentă fiind, suma sa nu este egală cu* $f(t)$ *pentru nici o valoare a lui* t.

În formulele (10.6), integralele nu depind de α, fapt care rezultă din teorema următoare.

Teorema 10.2.1 *Dacă $F(t)$ este o funcţie periodică de perioadă T, integrabilă pe orice interval mărginit, integrala acestei funcţii pe orice interval de lungime egală cu perioada este aceeaşi,*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} F(t)\,dt = \int_{\beta}^{\beta+T} F(t)\,dt. \tag{10.7}$$

Demonstraţie. În egalitatea evidentă

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} F(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(t)\,dt + \int_{\beta}^{\beta+T} F(t)\,dt + \int_{\beta+T}^{\alpha+T} F(t)\,dt, \tag{10.8}$$

ultima integrală se mai poate scrie

$$\int_{\beta+T}^{\alpha+T} F(t)\,dt = \int_{\beta}^{\alpha} F(\theta+T)\,d\theta = \int_{\beta}^{\alpha} F(\theta)\,d\theta = \int_{\beta}^{\alpha} F(t)\,dt, \tag{10.9}$$

ca urmare a faptului că s–a făcut schimbarea de variabilă $t = \theta + T$ şi s–a ţinut cont de periodicitatea funcţiei $F(t)$.

Având în vedere (10.9), prima şi ultima integrală din membrul al doilea a egalităţii (10.8), se reduc şi obţinem (10.7). ∎

Fie $f(t)$ o funcţie definită pe un interval $[a,b]$, exceptând eventual un număr finit de puncte din acest interval, cu menţiunea că funcţia poate fi prelungită dându–i valori arbitrare. În urma acestei operaţii de prelungire coeficienţii Fourier ai funcţiei rămân neschimbaţi.

Definiţia 10.2.2 *Se spune că $f(t)$ satisface* **condiţiile lui Dirichlet** *pe intervalul $[a,b]$ dacă :*

1. *$f(t)$ este mărginită şi are cel mult un număr finit de puncte de discontinuitate în $[a,b]$;*

2. *intervalul $[a,b]$ poate fi împărţit într–un număr finit de subintervale astfel încât, pe fiecare subinterval, $f(t)$ să fie monotonă.*

Observaţia 10.2.1 *Discontinuităţile funcţiei $f(t)$ în intervalul $[a,b]$ nu pot fi decât de prima speţă.*

Referitor la cazul în care seria Fourier a unei funcţii $f(t)$ este convergentă şi are suma $f(t)$, vom da (fără demonstraţie) o teoremă în care se prezintă condiţii suficiente ce trebuie să le satisface funcţia.

Teorema 10.2.2 (**Dirichlet**) *Dacă funcţia $f(t)$, periodică de perioadă T, satisface condiţiile lui Dirichlet pe un interval de lungime perioada $[\alpha, \alpha+T]$, seria sa Fourier este convergentă pentru orice t.*

Suma $S(t)$ a seriei Fourier este egală cu $f(t)$ în toate punctele în care $f(t)$ este continuă. Într–un punct de discontinuitate, $c \in [a, b]$, $S(c)$ este egală cu media aritmetică a celor două limite laterale ale funcţiei $f(t)$ în punctul c,

$$S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Determinarea seriei Fourier a unei funcţii $f(t)$ se reduce la calculul coeficienţilor daţi de formulele (10.6). Teorema 10.2.2 constituie un criteriu după care se poate reprezenta o funcţie prin seria sa Fourier sau, altfel spus, de a dezvolta o funcţie în serie Fourier.

În unele aplicaţii este necesar să derivăm sau să integrăm funcţia $f(t)$ şi seria sa Fourier. Teorema următoare, pe care o dăm tot fără demonstraţie, este utilă în acest sens.

Teorema 10.2.3 *Seria Fourier a unei funcţii $f(t)$ converge uniform către $f(t)$ pe orice interval închis pe care $f(t)$ este continuă.*

Observaţia 10.2.2 *În condiţiile Teoremei* 10.2.3, *seria Fourier poate fi integrată termen cu termen.*

Exemplul 10.2.1 *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f(t)$, de perioadă π, definită pe intervalul $(0, \pi)$ prin $f(t) = e^{-at}$.*

Soluţie. Mai întâi prelungim funcţia prin periodicitate, noua funcţie fiind notată cu acelaşi simbol. Dacă presupunem $a > 0$, atunci funcţia $f(t)$ este strict descrescătoare pe orice interval $(k\pi, (k+1)\pi)$. Există puncte din $\mathbb{R}$ în care $f(t)$ nu este definită; acestea sunt de forma $k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$. În aceste puncte atribuim funcţiei $f(t)$ valoarea

$$f(k\pi) = \frac{1 + e^{-a\pi}}{2}$$

care coincide cu media aritmetică a limitelor laterale în punctul $k\pi$ a funcţiei $f(t)$. Se vede că funcţia $f(t)$ astfel construită satisface condiţiile lui Dirichlet, deci seria sa Fourier este convergentă pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi are suma egală cu $f(t)$ pentru toate valorile lui t.

Deoarece $T=\pi$, $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$, avem

$$f(t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,\cos 2kt+b_k\,\sin 2kt),$$

coeficienţii a_0, a_k, b_k fiind daţi de formulele (10.6). Mai întâi

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-at}\,dt=\frac{1}{a\pi}(1-e^{-a\pi}).$$

Apoi, integralele care dau coeficienţii a_k şi b_k,

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-at}\,\cos 2kt\,dt,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-at}\,\sin 2kt\,dt,$$

pot fi calculate împreună

$$a_k-ib_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-(a+2ki)t}\,dt=$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{a+2ki}(1-e^{-(a+2ki)\pi})=\frac{2}{\pi}\frac{a-2ki}{a^2+4k^2}(1-e^{-a\pi}),$$

de unde

$$a_k=\frac{2a}{\pi}\cdot\frac{1-e^{-a\pi}}{a^2+4k^2},\quad b_k=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(1-e^{-a\pi})k}{a^2+4k^2}.$$

Dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei date este

$$f(t)=\frac{1-e^{-a\pi}}{\pi}\Big(\frac{1}{a}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a\,\cos 2kt+2k\,\sin 2kt}{a^2+4k^2}\Big).$$

Această serie Fourier este convergentă pe $I\!R$ şi suma sa este $f(t)$. ■

Exemplul 10.2.2 *Să se reprezinte printr–o serie Fourier funcţia $f(t)$, periodică de perioadă 2π, definită prin*

$$f(t)=\begin{cases}1, & \textit{pentru}\quad t\in(0,\pi)\\ -1, & \textit{pentru}\quad t\in(\pi,2\pi).\end{cases}$$

Soluţie. Pulsaţia este $\omega=\dfrac{2\pi}{T}=1$. Seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este de forma

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,\cos kt+b_k\,\sin kt).$$

Coeficienţii a_0, a_k şi c_k se calculează cu formulele (10.6)

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)dt\Big) = \pi - \pi = 0,\\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\cos ktdt = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\cos ktdt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\cos ktdt\Big) = 0,\\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\sin ktdt = \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}\sin ktdt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\sin ktdt\Big) =\\
&= \Big(\frac{1}{k}(1-\cos k\pi) + \frac{1}{k}(\cos 2k\pi - \cos k\pi)\Big) = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k}.
\end{aligned}$$

Expresia lui b_k se mai poate scrie în forma

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{pentru} \quad k = 2n\\ \dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{2n-1}, & \text{pentru} \quad k = 2n-1. \end{cases}$$

Atunci, seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} + \cdots\Big).$$

Conform Teoremei 10.2.2, acestă serie este convergentă pentru toate valorile lui t şi suma este egală cu $f(t)$ pentru orice $t \neq k\pi$, unde k este orice număr întreg.

În punctele $t = k\pi$ funcţia $f(t)$ nu a fost definită. Dacă luăm $f(0) = f(\pi) = 0$, datorită periodicităţii, $f(k\pi) = 0$ pentru orice k întreg, iar suma seriei va fi egală cu $f(t)$ şi în punctele de discontinuitate. Deci, oricare ar fi $t \in I\!R$, avem

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} + \cdots\Big).$$

Seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este o serie trigonometrică numai de sinusuri.■

Exemplul 10.2.3 *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $F(t)$, de perioadă 2π, definită pe intervalul $[0, 2\pi)$ prin*

$$F(t) = \begin{cases} t, & \textit{pentru} \quad t \in [0, \pi]\\ 2\pi - t, & \textit{pentru} \quad t \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

Soluţie. Observăm că pentru $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $F'(t) = f(t)$, unde $f(t)$ este funcţia din exemplul precedent. Integrând seria corespunzătoare lui $f(t)$ termen cu termen, fie în intervalul $(0, \pi)$, fie în intervalul $(\pi, 2\pi)$, obţinem

$$F(t) = C - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

Deoarece $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ şi $\cos{(2n-1)t} = 0$, rezultă $C = \frac{\pi}{2}$. Deci,

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

Seria Fourier obţinută este o serie trigonometrică numai de cosinusuri. ∎

Observaţia 10.2.3 *În cele de mai sus, funcţia $f(t)$ poate fi şi una cu valori complexe, deci de forma $f(t) = \phi(t) + i\psi(t)$.*

Teorema 10.2.4 *Pentru funcţia $f(t)$ cu pătrat integrabil pe $[\alpha, \alpha + T]$ are loc egalitatea*

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \tag{10.10}$$

unde a_0, a_n, b_n sunt coeficienţii Fourier ai funcţiei $f(t)$.

Relaţia (10.10) se numeşte *formula lui Parseval*.

Exerciţiul 10.2.1 *Să se găsească seria Fourier a funcţiei periodice $f(x) = \dfrac{\pi}{2\sinh\pi}e^t$ definită pe intervalul $(-\pi, \pi]$ de perioadă $T = 2\pi$. Ţinând seama de seria obţinută şi şi folosind formula lui Parseval să se determine sumele seriilor numerice*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}.$$

Soluţie. Se constată că

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}n}{1+n^2}.$$

Seria Fourier este

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nt + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{1+n^2}\sin nt. \tag{10.11}$$

Pentru a afla suma primei serii numerice luăm în (10.11) $t = 0$ şi obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}.$$

Suma celei de a doua serii numerice rezultă din formula lui Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\pi^2}{4 \sinh^2 \pi} e^{2t}\, dt = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{1}{(1+n^2)^2} + \frac{n^2}{(1+n^2)^2} \Big],$$

de unde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh \pi - \sinh \pi}{2 \sinh \pi}$. ■

10.3 Seriile Fourier ale funcţiilor pare şi impare

Funcţiile pare şi funcţiile impare au proprietatea că seriile lor Fourier iau forme particulare.

Definiţia 10.3.1 *O funcţie $F(t)$, definită pe un interval cu centrul în origine, se numeşte* **funcţie pară** *dacă $F(-t) = F(t)$.*

În cazul când $F(-t) = -F(t)$, funcţia $F(t)$ se numeşte **impară**.

Observaţia 10.3.1 *Graficul unei funcţii pare este simetric în raport cu axa ordonatelor, iar graficul unei funcţii impare este simetric faţă de originea reperului.*

Teorema 10.3.1 *Dacă $F(t)$ este o funcţie pară şi integrabilă pe intervalul $[-\ell, \ell]$, atunci*

$$\int_{-\ell}^{\ell} F(t)dt = 2 \int_{0}^{\ell} F(t)dt. \tag{10.12}$$

Dacă $F(t)$ este impară pe $[-\ell, \ell]$ şi integrabilă pe acest interval,

$$\int_{-\ell}^{\ell} F(t)dt = 0. \tag{10.13}$$

Demonstraţie. Avem

$$\int_{-\ell}^{\ell} F(t)dt = \int_{-\ell}^{0} F(t)dt + \int_{0}^{\ell} F(t)dt. \tag{10.14}$$

Cu schimbarea de variabilă $t = -\theta$, prima din integralele membrului drept a egalităţii (10.14) devine

$$\int_{-\ell}^{0} F(t)dt = -\int_{\ell}^{0} F(-\theta)d\theta = \int_{0}^{\ell} F(-\theta)d\theta = \int_{0}^{\ell} F(-t)dt.$$

De aici rezultă următoarele: dacă $F(t)$ este o funcţie pară,

$$\int_{-\ell}^{0} F(t)dt = \int_{0}^{\ell} F(t)dt, \tag{10.15}$$

iar dacă $F(t)$ este impară, atunci

$$\int_{-\ell}^{0} F(t)dt = -\int_{0}^{\ell} F(t)dt. \tag{10.16}$$

Din (10.15) şi (10.14) rezultă (10.12) iar (10.13) se obţine dacă înlocuim (10.16) în (10.14). ∎

În cele ce urmează vom considera că intervalul pe care sunt definite funcţiile pare sau funcţiile impare este de forma $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Teorema 10.3.2 *Dacă $f(t)$ este o funcţie pară, seria sa Fourier este*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t,$$

unde

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt, \quad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t\, dt.$$

Seria Fourier a unei funcţii impare $f(t)$ este

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t,$$

unde

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t\, dt.$$

Demonstraţie. Mai întâi, în formulele (10.6) de calcul a coeficienţilor, vom lua drept interval de integrare pe $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

Cu această alegere, avem

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt, \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos k\omega t\,dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin k\omega t\,dt.$$

Dacă $f(t)$ este o funcţie pară, $f(t)\,\cos k\omega t$ este pară, iar $f(t)\,\sin k\omega t$ este funcţie impară.

În baza Teoremei 10.3.1, rezultă

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt, \quad a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt, \quad b_k = 0.$$

Dacă $f(t)$ este funcţie impară, atunci funcţia $f(t)\,\cos k\omega t$ este impară, iar $f(t)\,\sin k\omega t$ este funcţie pară.

În baza aceleiaşi teoreme, avem

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin k\omega t\,dt$$

şi teorema este complet demonstrată. ■

Exemplul 10.3.1 *Să se reprezinte printr–o serie Fourier funcţia* $f(t) = |\sin t|$.

Soluţie. Funcţia dată este pară, are perioada $T = \pi$, este continuă şi condiţiile lui Dirichlet sunt satisfăcute. Prin urmare seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este convergentă, este o serie numai de cosinusuri şi are suma egală cu $f(t)$ pentru orice t real. Avem

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = \frac{2}{\pi}, \quad b_k = 0,$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos 2kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin{(1+2k)t} + \sin{(1-2k)t})dt = \\ &= -\frac{2}{\pi}\Big(\frac{\cos{(1+2k)t}}{1+2k} + \frac{\cos{(1-2k)t}}{1-2k}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}. \end{aligned}$$

Deci seria Fourier a funcţiei $f(t) = |\sin t|$ este

$$|\sin t| = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4t}{3\cdot 5} - \frac{\cos 6t}{5\cdot 7} - \cdots - \frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)} - \cdots\Big)$$

sau

$$|\sin t| = \frac{4}{\pi}\Big(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)}\Big).$$

Cum era de aşteptat, seria Fourier a funcţiei $f(t) = |\sin t|$ este o serie trigonometrică numai de cosinusuri. ∎

Exemplul 10.3.2 *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică de perioadă $T = 2a$, unde $a > 0$, definită prin*

$$f(t) = \begin{cases} t, & \textit{dacă} \quad t \in (-a, a) \\ 0, & \textit{dacă} \quad t = a. \end{cases}$$

Soluţie. Funcţia dată satisface condiţiile lui Dirichlet. În punctele de discontinuitate, funcţia ia valoarea dată de media aritmetică a limitelor sale laterale. Pentru toate valorile lui t, seria Fourier a funcţiei $f(t)$ este convergentă şi are suma egală cu $f(t)$.

Deoarece funcţia este impară şi $\omega = \dfrac{\pi}{a}$ avem dezvoltarea

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\frac{\pi}{a}t,$$

cu coeficienţii

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{a}\int_0^a t\sin k\frac{\pi}{a}t\,dt = \frac{2}{a}\Big(-\frac{a}{k\pi}t\cos k\frac{\pi}{a}t\Big)\Big|_0^a + \\ &+ \frac{2}{a}\frac{a}{k\pi}\int_0^a \cos k\frac{\pi}{a}t\,dt = \frac{2a}{k\pi}(-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Seria Fourier a funcţiei date este

$$f(t) = \frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{a}t.$$

Am obţinut o serie trigonometrică numai în sinusuri şi aceasta pentru că funcţia dată este impară. ∎

10.4 Forma complexă a seriei Fourier

Fie $f(t)$ o funcţie reală sau complexă, periodică de perioadă T, integrabilă pe intervalul $[\alpha, \alpha + T]$. Seria sa Fourier,

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\,\cos k\omega t + b_k\,\sin k\omega t), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{10.17}$$

este determinată, coeficienţii a_0, a_k, b_k fiind daţi de formulele (10.6).

Folosind formulele lui Euler

$$\cos k\omega t = \frac{e^{\,ik\omega t} + e^{-\,ik\omega t}}{2}, \quad \sin k\omega t = \frac{e^{\,ik\omega t} - e^{-\,ik\omega t}}{2i},$$

seria Fourier (10.17) devine

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{a_k - ib_k}{2}\,e^{\,ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2}\,e^{-\,ik\omega t}\Big). \tag{10.18}$$

Cu notaţiile

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_k^* = \frac{a_k + ib_k}{2}, \tag{10.19}$$

seria (10.18) se poate scrie

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k\,e^{\,ik\omega t} + c_k^*\,e^{-\,ik\omega t}). \tag{10.20}$$

Folosind (10.19) şi (10.6) constatăm că obţinem

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,dt,$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)(\cos k\omega t - i\,\sin k\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,e^{-\,ik\omega t}\,dt,\\ c_k^* &= \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)(\cos k\omega t + i\,\sin k\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\,e^{\,ik\omega t}\,dt. \end{aligned}$$

Observăm că toţi aceşti coeficienţi se pot obţine din

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau)\,e^{-\,in\omega\tau}\,d\tau, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

pentru $n = 0$, $n = k$ şi $n = -k$. Deci seria Fourier (10.20) a funcţiei $f(t)$ se mai scrie

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(c_k\, e^{ik\omega t} + c_{-k}\, e^{-\,ik\omega t})$$

sau încă

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{in\omega t}, \qquad c_n \;=\; \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau)\, e^{-\,in\omega\tau}\, d\tau.$$

Aceasta este *forma complexă a seriei Fourier.*

Dacă $f(t)$ satisface condiţiile lui Dirichlet şi dacă în fiecare punct de discontinuitate valoarea funcţiei este egală cu media aritmetică a limiteleor sale laterale în acel punct, atunci

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(\tau)\, e^{in\omega(t-\tau)}\, d\tau. \tag{10.21}$$

Exerciţiul 10.4.1 *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia periodică $f(t)$, de perioadă 2π, definită pe intervalul $[-\pi,\pi)$ prin*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \in \Big[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\Big] \cup \Big[\dfrac{\pi}{2}, \pi\Big) \\ t + \dfrac{\pi}{2}, & t \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, 0\Big] \\ -t + \dfrac{\pi}{2}, & \Big(0, \dfrac{\pi}{2}\Big). \end{cases}$$

Indicaţie. Funcţia este pară şi se obţine: $a_0 = \dfrac{\pi}{8}$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{1-\cos n\dfrac{\pi}{2}}{n^2}$. Deci

$$f(t) = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\cos t}{1^2} + \frac{2\,\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 3t}{3^2} + \frac{\cos 5t}{5^2} + \frac{2\,\cos 6t}{6^2} + \cdots\Big).$$

Seria obţinută conţine numai cosinusuri deorece $f(t)$ este funcţie pară.■

Exerciţiul 10.4.2 *Să se dezvolte în serie Fourier funcţia*

$$f(\theta) = \frac{\sin\theta}{13 - 12\,\cos\theta}.$$

Indicaţie. Se va calcula $a_k + ib_k$ folosind teorema reziduurilor. Se va obţine

$$f(\theta) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{3}\Big)^k \sin k\theta,$$

deci o serie numai de sinusuri, lucru previzibil deoarece funcţia $f(\theta)$ este impară. ■

Capitolul 11

Integrala Fourier şi transformate Fourier

11.1 Forma complexă a integralei Fourier

Să considerăm o funcţie neperiodică $f(t)$, reală sau complexă, definită pe toată axa reală. Evident, funcţia $f(t)$ nu mai poate fi dezvoltată în serie Fourier. În schimb, în anumite condiţii, care vor fi prezentate în teorema următoare, $f(t)$ poate fi reprezentată printr–o integrală dublă improprie care este oarecum analogă cu seria Fourier.

Definiţia 11.1.1 *Se numeşte* **integrala Fourier a funcţiei** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, *integrala dublă improprie pe întreg planul* $\mathbb{R}^2$ *depinzând de parametrul* t

$$\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(\tau)e^{iu(t-\tau)}dud\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{iu(t-\tau)}\, d\tau. \qquad (11.1)$$

Teorema 11.1.1 *Dacă funcţia reală sau complexă* $f(t)$ *are proprietăţile:*

1. *satisface condiţiile lui Dirichlet în orice interval de lungime finită;*
2. *în fiecare punct* c *de discontinuitate, valoarea funcţiei este egală cu media aritmetică a limitelor laterale (finite) în acel punct,*

$$f(c) = \frac{1}{2}[f(c-0) + f(c+0)];$$

3. este **absolut integrabilă** *pe intervalul* $(-\infty, \infty)$, *adică integrala improprie de speţa întâi* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ *este convergentă,*

atunci are loc identitatea

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{iu(t-\tau)}\, d\tau. \tag{11.2}$$

Demonstraţie. Vom schiţa calea pe care, plecând de la forma complexă a seriei Fourier (10.21), se poate ajunge la egalitatea (11.2).

Fie $F(t)$ o funcţie periodică, de perioadă 2ℓ, definită prin

$$F(t) = f(t), \quad t \in [-\ell, \ell]. \tag{11.3}$$

Această funcţie îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet, deci poate fi dezvoltată în serie Fourier.

Vom folosi dezvoltarea sub forma (10.21),

$$F(t) = \frac{1}{2\ell}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\ell}^{\ell} F(\tau)\, e^{in\omega(t-\tau)}\, d\tau, \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\ell} = \frac{\pi}{\ell}.$$

sau, ţinând seama de (11.3), în forma

$$F(t) = \frac{1}{2\ell}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\ell}^{\ell} f(\tau)\, e^{in\omega(t-\tau)}\, d\tau. \tag{11.4}$$

Egalitatea (11.3) are loc pe un interval oricât de mare se doreşte deoarece valoarea pozitivă a lui ℓ poate fi aleasă oricât de mare. Este de aşteptat ca din (11.4) să obţinem o reprezentare a funcţiei $f(t)$ trecând la limită pentru $\ell \to \infty$.

Cu notaţia $n\omega = u_n$, pentru un ℓ dat, integrala definită din (11.4) este o funcţie de două variabile

$$\phi(u_n, t) = \int_{-\ell}^{\ell} f(\tau)\, e^{iu_n(t-\tau)}\, d\tau.$$

Apoi, ţinând seama că $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2\ell}$, avem

$$\frac{1}{2\ell} = \frac{1}{2\pi}\omega, \quad \omega = n\omega - (n-1)\omega = u_n - u_{n-1}$$

şi (11.4) devine

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi(u_n, t) \cdot (u_n - u_{n-1}).$$

Această serie este asemănătoare cu sumele folosite în definirea integralei Riemann ale funcţiei $\phi(u,t)$ pe compactul $[-\ell, \ell]$, în care t se consideră ca parametru. Când $\ell \to \infty$, $u_n - u_{n-1} = \omega \to 0$. Este plauzibil să considerăm că , trecând la limită pentru $\ell \to \infty$, ultima egalitate devine

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(u,t)\, du,$$

unde

$$\phi(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{\,iu(t-\tau)}\, d\tau,$$

deci tocmai formula (11.2) şi teorema demonstrată ■

Definiţia 11.1.2 *Egalitatea* (11.2) *se numeşte* **formula lui Fourier**.

Exemplul 11.1.1 *Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \textit{pentru} \quad |t| < a, \\ \dfrac{1}{2}, & \textit{pentru} \quad t = \pm a, \\ 0, & \textit{pentru} \quad |t| > a, \end{cases}$$

unde a este un număr pozitiv. Această funcţie se numeşte **factorul discontinuu al lui Dirichlet**.

Soluţie. Se observă că toate condiţiile din Teorema 11.1.1 sunt satisfăcute, deci se poate aplica formula lui Fourier. Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{\,iu(t-\tau)}\, d\tau = \int_{-a}^{a} e^{\,iu(t-\tau)}\, d\tau = -\frac{1}{iu} e^{\,iu(t-\tau)} \Big|_{\tau=-a}^{\tau=a} = \frac{2}{u} e^{\,iut} \sin au.$$

Introducând în (11.2), obţinem

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin au}{u}\, e^{\,iut}\, du.$$

Dacă se înlocuieşte $e^{iut} = \cos ut + i\,\sin ut$, $f(t)$ se poate scrie ca o sumă de două integrale

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin au\,\cos ut}{u}\,du + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin au\,\sin ut}{u}\,du.$$

Cum integrantul primei integrale este funcţie pară în u, iar al doilea este funcţie impară în raport cu aceeaşi variabilă, rezultă

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin au\,\cos ut}{u}\,du.$$

■

11.2 Forma reală a integralei Fourier

Deoarece

$$e^{iu(t-\tau)} = \cos u(t-\tau) + i\,\sin u(t-\tau),$$

formula lui Fourier se poate scrie în forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\cos u(t-\tau)\,d\tau + \\ &+ \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\sin u(t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{11.5}$$

Observăm că funcţiile

$$g(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\cos u(t-\tau)\,d\tau\,; \quad h(u,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\sin u(t-\tau)\,d\tau$$

au proprietăţile

$$g(-u,t) = g(u,t), \quad h(-u,t) = -\,h(u,t),$$

deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u,t)\,du = 2\int_{0}^{+\infty} g(u,t)\,du, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h(u,t)\,du = 0$$

şi (11.5) se reduce la

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\cos u(t-\tau)\,d\tau. \tag{11.6}$$

Definiţia 11.2.1 *Relaţia* (11.6) *se numeşte* **forma reală a formulei lui Fourier**.

Definiţia 11.2.2 *Integrala dublă improprie din membrul drept al formei reale a formulei lui Fourier se numeşte* **forma reală a integralei Fourier**.

Denumirile: *forma reală*, respectiv *forma complexă a integralei Fourier*, sunt justificate numai în cazul când $f(t)$ este o funcţie reală; totuşi acestea se folosesc şi în cazul când $f(t)$ este o funcţie complexă. Această observaţie este valabilă şi pentru seriile Fourier.

Observaţia 11.2.1 *Deoarece ultima integrală din* (11.5) *este egală cu zero, egalitatea* (11.2) *se poate înlocui prin*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-iu(t-\tau)}\, d\tau. \tag{11.7}$$

Deoarece $\cos u(t-\tau) = \cos ut\, \cos u\tau + \sin ut\, \sin u\tau$, egalitatea (11.6) se mai poate scrie

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos ut\, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \cos u\tau\, d\tau + \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sin ut\, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \sin u\tau\, d\tau. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Dacă notăm

$$A(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \cos u\tau\, d\tau, \quad B(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \sin u\tau\, d\tau,$$

avem

$$f(t) = \int_{0}^{+\infty} \Big(A(u)\, \cos ut + B(u)\, \sin ut \Big)\, du.$$

Analogia cu seria Fourier este evidentă.

11.3 Integralele Fourier ale funcţiei pare respectiv impare

Să vedem ce devine integrala Fourier în cazul când $f(t)$ este o funcţie pară, respectiv impară.

Teorema 11.3.1 *Dacă $f(t)$ este o funcţie pară, formula lui Fourier se reduce la*

$$f(t) \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos ut\,du\int_0^{+\infty} f(\tau)\,\cos u\tau\,d\tau. \tag{11.9}$$

Dacă $f(t)$ este impară, atunci

$$f(t) \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin ut\,du\int_0^{+\infty} f(\tau)\,\sin u\tau\,d\tau. \tag{11.10}$$

Demonstraţie. Într–adevăr, dacă $f(t)$ este o funcţie pară, atunci funcţia $f(\tau)\,\cos u\tau$ este pară în raport cu τ, iar $f(\tau)\,\sin u\tau$ este impară şi avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\cos u\tau\,d\tau = 2\int_0^{+\infty} f(\tau)\,\cos u\tau\,d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\sin u\tau\,d\tau = 0.$$

Cu aceste relaţii, egalitatea (11.8) se reduce la (11.9).

Analog se arată că pentru $f(t)$ funcţie impară avem egalitatea (11.10).■

Pentru a vedea utilitatea formulelor (11.9) şi (11.10) în simplificarea calculelor, este suficient să se reia Exemplul 11.1.1. Funcţia pe care am numit–o factorul discontinuu al lui Dirichlet este o funcţie pară.

În exemplul următor vom considera o funcţie impară.

Exemplul 11.3.1 *Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia*

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & |t| \le n\pi, \\ 0, & |t| > n\pi, \end{cases}$$

n fiind un număr natural.

Soluţie. Funcţia $f(t)$ satisface condiţiile Teoremei 11.1.1, deci poate fi reprezentată printr–o integrală Fourier.

Vom folosi formula (11.10). Avem

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)\,\sin u\tau\,d\tau = \int_0^{n\pi} sin\tau\,\sin u\tau\,d\tau.$$

Pentru calculul integralei din membrul drept, transformăm produsul de sinusuri în diferenţă de cosinusuri, integralele astfel apărute fiind imediate. Găsim

$$\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin u\tau d\tau = \frac{(-1)^n \sin nu\pi}{u^2-1}.$$

Cu aceasta, egalitatea (11.10) dă

$$f(t) = \frac{2(-1)^n}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin n\, u\pi\, \sin ut}{u^2 - 1} du.$$

■

11.4 Transformata Fourier

Integrala Fourier are aplicaţii variate. Unele din acestea sunt legate de noţiunea de transformată Fourier.

Fie $f(t)$ o funcţie care poate fi reprezentată prin integrala Fourier (11.2). Pentru aceasta, funcţia $f(t)$ trebuie să satisfacă ipotezele Teoremei 11.1.1. Egalitatea (11.2) se mai scrie

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\,iut} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-\,iu\tau}\, d\tau. \tag{11.11}$$

Dacă notăm

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-\,iu\tau}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\,iut}\, dt,$$

atunci (11.11) se scrie în forma

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{\,iut}\, du.$$

Definiţia 11.4.1 *Funcţiile*

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\,iut} dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{\,itu} du \tag{11.12}$$

se numesc **una, transformata Fourier a celeilalte**.

Am văzut că integrala Fourier mai poate fi scrisă şi sub forma (11.7). Pornind de la aceasta, se obţin funcţiile

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{\,iut}\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{-\,iut}\, du$$

ca transformate Fourier una a celeilalte. Prin urmare cele două funcţii au roluri simetrice.

Analog, dacă în egalitatea (11.9) se notează

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\tau)\, \cos u\tau\, d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, \cos ut\, dt,$$

această egalitate devine

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u)\, \cos tu\, du,$$

iar dacă în (11.10) se notează

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\tau)\, \sin u\tau\, d\tau = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, \sin ut\, dt,$$

egalitatea (11.10) se scrie

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u)\, \sin tu\, du.$$

Definiţia 11.4.2 *Funcţiile*

$$\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, \cos ut\, dt, \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u)\, \cos tu\, du \end{aligned} \tag{11.13}$$

se numesc **una, transformata Fourier prin cosinus a celeilalte.**

Definiţia 11.4.3 *Funcţiile*

$$\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t)\, \sin ut\, dt, \\ f(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u)\, \sin tu\, du \end{aligned} \tag{11.14}$$

se numesc **una, transformata Fourier prin sinus a celeilalte.**

Să considerăm, de exemplu, a doua egalitate din (11.12)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{\,iut}\, du = f(t), \tag{11.15}$$

unde $f(t)$ este o funcţie dată care satisface condiţiile Teoremei 11.1.1. Această egalitate este o ecuaţie în care funcţia necunoscută figurează sub semnul de integrare. Soluţia ei este dată de prima din egalităţile (11.12).

Definiţia 11.4.4 *În general, dacă într–o ecuaţie funcţia necunoscută figurează sub semnul de integrare, se spune că acea egalitate este o* **ecuaţie integrală**.

Definiţia 11.4.5 *Ecuaţia integrală* (11.15) *se numeşte* **ecuaţie integrală de tip Fourier**.

Tot ecuaţii integrale de tip Fourier sunt şi ecuaţiile:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(u)\,\cos tu\,du = f(t); \tag{11.16}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(u)\,\sin tu\,du = f(t), \tag{11.17}$$

cu $f(t)$ definită pentru $t > 0$ şi îndeplinind condiţiile cerute de prima teoremă referitoare la integrala Fourier. Soluţiile acestor ecuaţii integrale sunt funcţiile $g(u)$ din $(11.13)_1$, respectiv $(11.14)_1$.

Observaţia 11.4.1 *Dacă funcţiile $g(u)$ şi $f(t)$ sunt definite pe axa reală, relaţiile* (11.13) *cer ca $g(u)$ şi $f(t)$ să fie funcţii pare. De asemenea, relaţiile* (11.14), *cu $f(t)$ şi $g(u)$ definite pe toată axa reală, nu pot fi satisfăcute decât pentru $f(t)$ şi $g(u)$ funcţii impare. Spre exemplu, dacă funcţia $f(t)$ este definită numai pentru $t > 0$, aceasta nu poate fi prelungită pentru $t \leq 0$ decât într–un singur fel dacă vrem ca* (11.13) *sau* (11.14) *să existe. În primul caz se prelungeşte prin relaţia $f(-t) = f(t)$ (deci prin paritate), în al doilea caz prelungirea se face prin relaţia $f(-t) = -f(t)$ (deci prin imparitate).*

Exemplul 11.4.1 *Să se determine transformatele Fourier prin cosinus şi prin sinus ale funcţiei $f(t) = e^{-at}$, unde $t \in (0, \infty)$ iar $a > 0$.*

Soluţie. Pentru ca transformatele Fourier prin sinus şi cosinus să funcţioneze oricare ar fi t real, funcţia $f(t)$ se prelungeşte în intervalul $(-\infty, 0]$ astfel:

- în cazul transformatei prin cosinus,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ e^{at}, & t \leq 0; \end{cases}$$

- în cazul transformatei prin sinus,

$$f(t)=\begin{cases} e^{\,-\,at}, & t>0\\ 0, & t=0\\ -\,e^{\,at}, & t<0.\end{cases}$$

În ambele cazuri, funcţia $f(t)$ poate fi reprezentată ca o integrală Fourier.

Fie $g_c(u)$ transformata Fourier prin cosinus şi $g_s(u)$ transformata Fourier prin sinus,

$$g_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{\,-\,at}\cos ut\,dt,\quad g_s(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{\,-\,at}\sin ut\,dt.$$

Aceste integrale se pot calcula simultan, luând

$$\begin{aligned} g_c(u)+ig_s(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-at}(\cos ut+i\sin utdt= \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-(a-iu)t}dt= \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{a-iu}(e^{-(a-iu)t})\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a+iu}{a^2+u^2}, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$g_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+u^2},\quad g_s(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{a^2+u^2}.$$

Introducând aceste funcţii în (11.13) şi (11.14), se obţin formulele

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos tu}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{2a}e^{\,-\,at},\quad \int_0^{+\infty}\frac{u\,\sin tu}{a^2+u^2}du=\frac{\pi}{2}e^{\,-\,at}$$

care se numesc *integralele lui Laplace.* ■

Exerciţiul 11.4.1 *Să se calculeze transformata prin cosinus a funcţiei*

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

şi din rezultatul obţinut să se deducă relaţia

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,\sin ux}{(1+x^2)^2}\,dx=\frac{\pi\,u\,e^{-u}}{4}. \tag{11.18}$$

Soluţie. Transformata Fourier prin cosinus a funcţiei $f(x)$ este

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Pentru calculul integralei de aici, putem folosi teorema reziduurilor

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos ux dx = \pi \mathrm{Re} \left(i \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Rez}\, [e^{iuz} f(z), z_k] \right),$$

unde z_k sunt polii funcţiei $f(z)$ situaţi în semiplanul superior.

Cum unicul punct singular este $z_1 = i$, care este pol dublu, avem

$$\mathrm{Rez}\, [e^{iuz} f(z), z] = \left(\frac{e^{iuz}}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \frac{1+u}{4i} e^{-u}.$$

Rezultă $F_c(u) = \sqrt{2\pi} \dfrac{1+u}{4} e^{-u}$, de unde deducem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ux}{(1+x^2)^2}\, dx = \pi \frac{1+u}{4} e^{-u}.$$

Membrul stâng al acestei egalităţi este o integrală improprie simplă depinzând de parametrul u. Aplicând teorema de derivare a acestui tip de integrală depinzând de un parametru, se obţine relaţia (11.18). ■

Exerciţiul 11.4.2 *Să se rezolve ecuaţia integrală*

$$\int_0^{+\infty} g(u) \cos tudu = \begin{cases} 1-t, & \textit{pentru} \quad 0 < t \le 1 \\ 0, & \textit{pentru} \quad t > 1. \end{cases}$$

Soluţie. Ecuaţia dată este de forma

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(u) \cos tudu = f(t),$$

unde

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}(1-t), & \text{pentru} \quad 0 < t \le 1 \\ 0, & \text{pentru} \quad t > 1. \end{cases}$$

Soluţia acestei ecuaţii este dată de prima egalitate (11.13). Avem

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 f(t) \cos ut \, dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^{+\infty} f(t) \cos ut \, dt.$$

Deoarece $f(t) = 0$ pentru $t > 1$, a doua integrală este nulă. Aşadar,

$$g(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-t) \cos ut \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos u}{u^2}.$$

■

Exerciţiul 11.4.3 *Să se reprezinte printr–o integrală Fourier funcţia*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \textit{pentru} \quad |t| \geq 1 \\ -1, & \textit{pentru} \quad t \in (-a, 0) \\ 1, & \textit{pentru} \quad t \in (0, a), \end{cases}$$

şi care ia valorile $f(0) = 0,\ f(-a) = -\dfrac{1}{2},\ f(a) = \dfrac{1}{2}.$

Indicaţie. Funcţia este impară. Se obţine

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin tu}{u} \sin^2 \frac{au}{2} \, du.$$

Observăm că, până la un factor, $f(t)$ este o transformată Fourier prin sinus. ■

Exerciţiul 11.4.4 *Să se determine funcţia* $f(t)$ *care satisface ecuaţia*

$$\int_0^{+\infty} f(t) \cos tx \, dt = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad x \geq 0,$$

unde a *este o constantă reală pozitivă.*

Soluţie. Se aplică a doua formulă din (11.12) şi avem

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^2 + a^2} \, dx.$$

Integrala se poate calcula fie utilizând teorema reziduurilor fie folosind integralele lui Laplace. Se obţine $f(t) = \dfrac{1}{a} e^{-at}$. ■

Exerciţiul 11.4.5 *Să se rezolve ecuaţiile integrale:*

$$2\int_0^{+\infty} g(u)\sin tu du = \begin{cases} \pi\sin t, & \textit{pentru} \quad t\in(0,\pi) \\ 0, & \textit{pentru} \quad t\geq\pi; \end{cases}$$

$$4\int_0^{+\infty} h(u)\cos tu du = \begin{cases} 2\pi\cos t, & \textit{pentru} \quad t\in(0,\pi) \\ 0, & \textit{pentru} \quad t>\pi \\ -\pi, & \textit{pentru} \quad t=\pi. \end{cases}$$

Indicaţie. Se aplică teoria de la ultimul paragraf şi se găseşte

$$g(u)=\frac{\sin\pi u}{1-u^2},\quad h(u)=\frac{u\,\sin\pi u}{1-u^2}.$$

■

Exerciţiul 11.4.6 *Să se determine soluţia ecuaţiei integrale de tip Fourier*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{\,iut}\,dt = \begin{cases} |u|, & \textit{pentru} \quad u\in(-1,1) \\ \frac{1}{2}, & \textit{pentru} \quad u=\pm 1 \\ 0, & \textit{pentru} \quad |u|>1. \end{cases}$$

Soluţie. Exceptând factorul $\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}$ şi schimbând între ele atât variabilele u şi t cât şi funcţiile f şi g, rezultă că ecuaţia integrală din enunţ este de forma celei de a doua din egalităţile (11.12).

Soluţia acestei ecuaţii integrale este dată de prima egalitate (11.12). Avem

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{0}(-u)e^{-\,iut}\,dt+\frac{1}{2\pi}\int_0^1 u\,e^{-\,iut}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u\,\cos ut\,du.$$

Se obţine $f(t)=\dfrac{2}{\pi t^2}\Big(t\cos\dfrac{t}{2}-\sin\dfrac{t}{2}\Big)\sin\dfrac{t}{2}\cdot$ ■

11.5 Proprietăţi ale transformatei Fourier

Prezentăm mai jos principalele proprietăţi ale transformatelor Fourier. Pentru a se urmări mai uşor raţionamentele, notăm cu $F(u)$ transformata Fourier a funcţiei $f(t),\ t\in I\!R$. Folosind prima egalitate din (11.12), avem

$$F: I\!R\to I\!R,\qquad F(u)\ =\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-\,iut}\,dt. \tag{11.19}$$

Definiţia 11.5.1 *Funcţia* $f : I\!R \to I\!R$ *din* (11.19) *se numeşte* **original**.

Teorema 11.5.1 *Dacă* $f : I\!R \to I\!R$ *este funcţie absolut integrabilă, funcţia* $F(u)$, *transformata Fourier a funcţiei* $f(t)$, *este o funcţie continuă.*

Demonstraţie. Proprietatea enunţată se verifică imediat cu ajutorul unui criteriu de convergenţă pentru integrala improprie de prima speţă depinzând de parametrul u din (11.19). ■

Teorema 11.5.2 *Dacă funcţiile* $t^k f(t)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, *unde* $f : I\!R \to I\!R$, *sunt absolut integrabile, atunci transformata Fourier a funcţiei* f, *definită de* (11.19), *este derivabilă de* n *ori şi*

$$F^{(k)}(u) \;=\; \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k\, f(t)\, e^{-\,iut}\, dt, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{11.20}$$

Demonstraţie. Integrala improprie (11.19) depinde de parametrul real u.

În baza unui criteriu de convergenţă uniformă al integralelor de acest tip, rezultă că integralelor din (11.19) şi (11.20), unde $k \in \overline{1, n-1}$, li se poate aplica formula de derivare a lui Euler şi obţinem (11.20). ■

Teorema 11.5.3 *Dacă primele* $r - 1$ *derivate ale funcţiei* $f : I\!R \to I\!R$ *tind la zero când* $|t| \to \infty$ *iar* $f^{(r)}(t)$ *este absolut integrabilă, atunci*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^r f}{dt^r}(t)\, e^{-\,iut}\, dt \;=\; (iu)^r\, F(u). \tag{11.21}$$

Demonstraţie. Să notăm cu $F_r(u)$ transformata Fourier a funcţiei $\dfrac{d^r f}{dt^r}(t)$

$$F_r(u) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^r f}{dt^r}(t)\, e^{-\,iut}\, dt. \tag{11.22}$$

Integrând prin părţi în (11.22), ţinând cont că

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{d^{r-1} f}{dt^{r-1}}(t) \;=\; 0$$

şi că funcţia complexă $e^{-\,iut}$ este mărginită (are modulul egal cu 1), se găseşte următoarea relaţie de recurenţă

$$F_r(u) \;=\; (iu)\, F_{r-1}(u).$$

Dacă la această relaţie de recurenţă adăugăm faptul că $F_0(u) = F(u)$, obţinem

$$F_r(u) \;=\; (iu)^r\, F(u). \tag{11.23}$$

Egalitatea (11.21) rezultă din (11.22) şi (11.23). ∎

Teorema 11.5.4 *Dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este absolut integrabilă, iar*

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_0^t f(\tau)\, d\tau \;=\; 0, \tag{11.24}$$

atunci are loc egalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \Big) e^{-\,iut}\, dt \;=\; \frac{1}{iu}\, F(u). \tag{11.25}$$

Demonstraţie. Integrând prin părţi în membrul întâi din (11.24) şi ţinând cont de faptul că

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)\, d\tau \;=\; f(t),$$

obţinem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_0^t f(\tau)\, d\tau \Big) e^{-\,iut}\, dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[-\frac{1}{iu} e^{-\,iut} \int_0^t f(\tau)\, d\tau \Big]\Big|_{t=-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{iu} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-\,iut}\, dt. \end{aligned} \tag{11.26}$$

Dacă se ţine seama de ipoteze, din (11.26) se obţine (11.25). ∎

Observaţia 11.5.1 *Transformata Fourier a derivatei de ordin r a funcţiei original $f(t)$ este egală cu produsul dintre funcţia complexă $(iu)^r$ şi transformata Fourier $F(u)$ a funcţiei $f(t)$.*

Observaţia 11.5.2 *Transformata Fourier a integralei din funcţia $f(\tau)$ pe intervalul compact variabil $[0, t]$ este egală cu raportul dintre transformata Fourier $F(u)$ a funcţiei $f(t)$ şi funcţia complexă (iu).*

Analiza ultimelor două observaţii conduce la ideea reducerii unor operaţii complicate ale analizei matematice la simple operaţii algebrice asupra transformatelor funcţiilor, cu inversarea în final a rezultatului după formula

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{itu} du.$$

Această idee stă la baza *calculului operaţional.*

Definiţia 11.5.2 *Funcţia* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$*, notată* $f\star g$*, se numeşte* **produsul de convoluţie** *al funcţiilor* f *şi* g *pe intervalul* $(-\infty,+\infty)$.

Prin urmare, putem scrie

$$(f\star g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{11.27}$$

Exerciţiul 11.5.1 *Să se arate că dacă* $F(u)$ *şi* $G(u)$ *sunt transformatele Fourier ale funcţiilor* $f(t)$ *şi* $g(t)$*, atunci*

$$(f\star g)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{iut}du. \tag{11.28}$$

Soluţie. Avem succesiv

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)e^{iut}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(u)e^{iut}du\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\tau u}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} G(u)e^{iu(t-\tau)}du=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Rezultatul la care am ajuns, împreună cu (11.27), conduce la (11.28). ■

Observaţia 11.5.3 *Deoarece integrala* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)G(u)\,e^{iut}du$ *nu se modifică când schimbăm între ele funcţiile* $F(u)$ *şi* $G(u)$ *rezultă că* $f\star g=g\star f$.

Exerciţiul 11.5.2 *Folosind relaţia* (11.28)*, să se obţină egalitatea*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{-a^2u^2x}e^{iut}du=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+2a\sqrt{x}\,z)e^{-z^2}dz. \tag{11.29}$$

Soluţie. În relaţia (11.28) punem $G(u)=e^{-a^2u^2x}$, de unde rezultă că funcţia $g(t)$ corespunzătoare este

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2u^2x}e^{iut}du. \tag{11.30}$$

Dar, $e^{iut}=\cos ut+i\sin ut$ iar funcţia $e^{-a^2u^2x}\sin ut$ este impară. Atunci, din (6.24) şi (11.30) rezultă

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2u^2x}\cos ut\;du=\frac{1}{a\sqrt{2x}}\;e^{-\frac{t^2}{4a^2x}}.$$

Folosind această expresie a lui $g(t)$ în (11.27) şi efectuând apoi schimbarea de variabilă $\dfrac{\tau - t}{2a\sqrt{x}} = z$, se obţine egalitatea (11.29). ∎

Exemplul 11.5.1 (**Coarda elastică**) *Fie o coardă elastică suficient de lungă încât să se poată presupune că are lungime infinită. Sub acţiunea unor factori externi, coarda vibrează. La momentul $t = 0$ configuraţia corzii este graficul funcţiei $f(x)$ definită pe întreaga axă reală. La momentul $t > 0$, datorită vibraţiilor, configuraţia corzii este alta, să zicem $u(x,t)$. Funcţia $u = u(x,t)$ se numeşte* **săgeată**. *Presupunem că se cunoaşte viteza $g(x)$ cu care se schimbă forma corzii la momentul $t = 0$, deci cunoaştem valoarea în punctul $(x,0)$ a derivatei parţiale în raport cu variabila temporară t a funcţiei $u(x,t)$. Din teoria elasticităţii se ştie că legea după care vibrează coarda este*

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{11.31}$$

Să se determine poziţia corzii la orice moment şi în orice punct al ei.

Soluţie. Problema pusă se reduce la determinarea acelei soluţii $u(x,t)$ a ecuaţiei (11.31) care satisface *condiţiile iniţiale*

$$u(x,0) \;=\; f(x), \qquad x \in (-\infty,\infty), \tag{11.32}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \;=\; g(x), \qquad x \in (-\infty,\infty). \tag{11.33}$$

Astfel, avem de rezolvat o *problemă de tip Cauchy pentru ecuaţia diferenţială* (11.31) *cu condiţii iniţiale* (11.32) şi (11.33).

Pentru aceasta, vom înmulţi ecuaţia cu $e^{-i\xi x}$ după care integrăm în raport cu x de la $-\infty$ la $+\infty$.

Derivarea parţială în raport t comută cu integrarea în raport cu x, astfel că putem scrie

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx. \tag{11.34}$$

În membrul drept al relaţiei (11.34) se aplică Teorema 11.5.3, astfel încât se obţine ecuaţia

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2 U}{dt^2}(\xi,t) + \xi^2 U(\xi,t) = 0, \tag{11.35}$$

unde funcţia $U(\xi,t)$ este transformata Fourier a funcţiei $u(x,t)$.

În felul acesta, cu ajutorul transformatei Fourier am înlocuit ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale (11.31) cu ecuaţia diferenţială ordinară (11.35).

Condiţiile iniţiale (11.32) şi (11.33) se transformă respectiv în

$$U(\xi,0) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\,i\xi x}\, dx \quad = \quad F(\xi); \tag{11.36}$$

$$\frac{dU}{dt}(\xi,0) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-\,i\xi x}\, dx \quad = \quad G(\xi). \tag{11.37}$$

Astfel, avem de rezolvat o problemă de tip Cauchy pentru ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul doi, liniară, (11.35) cu condiţiile iniţiale (11.36) şi (11.37).

Un sistem fundamental de soluţii al ecuaţiei (11.35) conţine funcţiile

$$U_1(\xi,t) = \cos a\xi t, \quad U_2(\xi,t) = \sin a\xi t.$$

Atunci, soluţia generală a ecuaţiei (11.35) este

$$U(\xi,t) = C_1 U_1(\xi,t) + C_2 U_2(\xi,t) = C_1 \cos a\xi t + C_2 \sin a\xi t$$

unde constantele de integrare C_1 şi C_2 sunt funcţii de ξ. Însă,

$$U(\xi,0) = C_1(\xi) = F(\xi), \quad \frac{dU}{dt}(\xi,0) = a\xi C_2(\xi) = G(\xi).$$

Dacă folosim relaţiile lui Euler, rezultă că expresia lui $U(\xi,t)$ este

$$U(\xi,t) = \frac{1}{2}F(\xi)(e^{\,iat\xi} + e^{-iat\xi}) + \frac{G(\xi)}{2ia\xi}(e^{\,iat\xi} - e^{-iat\xi}). \tag{11.38}$$

Aplicând transformarea Fourier inversă funcţiei $U(\xi,t)$, obţinem

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi,t)\, e^{\,ix\xi}\, d\xi. \tag{11.39}$$

Înlocuind în (11.39) pe $U(\xi,t)$ din (11.38) şi ţinând cont de rezultatele

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\, e^{\,i(x\pm at)\xi}\, d\xi = f(x\pm at), \quad g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi) e^{\,iu\xi} d\xi,$$

$$\begin{aligned}\int_{x-at}^{x+at} g(u)\, du \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi)\Big(\int_{x-at}^{x+at} e^{\,i\xi u}\, du\Big)d\xi = \\ &= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\xi)}{i\,\xi}\Big(e^{\,i(x+at)\xi} + e^{\,i(x-at)\xi}\Big)d\xi,\end{aligned}$$

găsim

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+at) + f(x-at)) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(u)\, du,$$

ceea ce arată că problema considerată are soluţie unică. ■

Bibliografie

[1] Adams, Robert, A.– *Calculus. A complete Course,* Forth ed., Addison–Wesley, 1999

[2] Bermant, A. F., Aramanovich, I. G.– *Mathematical Analysis, A Brief Course for Engineering Students*, Mir Publishers, Moscow 1986.

[3] Brânzănescu, V., Stănăşilă, O.– *Matematici speciale. Teorie, exemple, aplicaţii*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[4] Bucur, Gh., Câmpu, E., Găină, S.– *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. III*, Editura Tehnică, Bucureşti 1967.

[5] Budak, B., M., Fomin, S., V.– *Multiple integrals, field theory and series. An advanced course in Higher Mathematics*, Mir Publishers, Moscou, 1973.

[6] Chiorescu, Gh.– *Matematici speciale. Culegere de aplicaţii în mecanică*, Editura "Gh. Asachi" Iaşi, 1995.

[7] Crstici, B. (coordonator)– *Matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[8] Ciobanu, Gh., Chiorescu, Gh., Sava, V.– *Capitole de matematici speciale*, Rotaprint, Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi, Facultatea de Electronică şi Telecomunicaţii, Catedra de Matematică, 1998.

[9] Craiu, M., Roşculeţ, M., N.– *Ecuaţii diferenţiale aplicative. Probleme de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul I*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1971.

[10] Enescu, I., Sava, V.– *Matematici speciale*, Institutul Politehnic Iaşi, Facultatea de Mecanică, Rotaprint, 1981.

[11] Evgrafov, M., Béjanov, K., Sidorov, Y., Fédoruk, M., Chabounine, M. – *Recueil de problèmes sur la theorie des fonctions analytiques*, Deuxième édition, Éditions Mir, Moscou, 1974.

[12] Găină, S., Câmpu, E., Bucur, Gh.– *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral Vol. II*, Editura Tehnică, Bucureşti 1966

[13] Nicolescu, L., J., Stoka, M., I.– *Matematici pentru ingineri.* Vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[14] Radu, C., Drăguşin, C., Drăguşin, L.– *Aplicaţii de algebră, geometrie şi matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti – 1991.

[15] Smirnov, V.– *Cours de mathématiques supérieures, tome II*, Éditions Mir – Moscou, 1972.

[16] Smirnov, V.– *Cours de mathématiques supérieures, tome III, Deuxième partie*, Éditions Mir, Moscou, 1972

[17] Şabac, I., Gh.– *Matematici speciale*, Vol. I, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

[18] Şabac, I., Gh.– *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1965.

[19] Şabac, I., Gh., Cocârlan, P., Stănăşilă, O., Topală, A.– *Matematici speciale*, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[20] Sveshnikov, A., Tikhonov, A.– *The theory of functions of a complex variable*, Mir Publishers, Moscou, 1978.

[21] Thomas, Jr., G. B., Finney, R. L.– *Calculus and Analytic Geometry*, 7th Edition, Addison–Wesley Publishing Company 1988

[22] Zeldovitch, I., Mychkis, A.– *Éléments de mathématiques appliquées*, Éditions Mir – Moscou, 1974.